Imprimatur,

Edmundo Boldero PROCANCELLARIO.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Johan.*
Jo. Pearſon Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166$\frac{8}{9}$.

4

LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:

In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuinæ *Rationes* investigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

Auctore ISAACO BARROW,
Collegii *SS. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto,
Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

> Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ παθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub.
>
> Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν οὐ χεῖρον. Arist.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & prostant venales apud
Robertum Scott, in vico **Little-Britain.** 1674.

SPECTATISSIMIS VIRIS
ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK
ARMIGERIS;

HAS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* inſtitutæ atque dotatæ, ab ipſis verò optimâ fide, ſummâque prudentiâ adminiſtratæ & conſtitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac obſervantiæ ergò, devovet

Iſaac Barrow.

BENEVOLO LECTORI.

E *Lectionibus his* (*quas jam quodammodò poſthumas accipis*) *ſeptem, unâ ſepoſitâ, poſtremas* Opticis *illis, quæ nuper editæ proſtant, Comitis & quaſi Mantiſſas deſtinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejuſmodi quiſquiliis nihil cogitaturus.* Sed *cum nihilominùs è re ſua fore cenſeret* Librarius *ab iſtis divulſas has ſeorſum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ ſpeciem aliquam* (*ut ea nempe* rejectanei Schediaſmatis *molem tranſcenderet*) *aliud quidpiam ſuppeditari cuperet; ejus* (*haud gravatìm non dixero*) *votis obſecundans, adjeci Lectiones priores quinque; ſubſequentibus illis materiâ agnatas, & quaſi cohærentes; quas ſcilicet ante aliquot annos* *ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò craſsiùs & ἐπιπολαιότερον ſcriptæ ſunt, neque firmè quicquam continent, extra* Tyronum, *quibus accommodatæ ſunt, uſum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obteſtor, ut ab iis prorſus abſtineant oculos, vel ut veniam ſaltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi ſeptem conſpectui tuo lubentiùs expono, nonnulla ſperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inſpicere. Ultimam* amicus *(vir ſanè cum primis probus, aſt in hujuſmodi negotiis* Flagitator improbus*) extorſit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet ſuo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorſum tendant, facilè ſingularum initia delibans edoceberis; ut non ſit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

EPISTOLA ad LECTOREM.

BENIGNE LECTOR,

Minimè tibi deſtinatum hoc quicquid eſt opellæ, ſtatim ipſe, modò digneris inſpicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præſertim obſequutus ſum, quoniam in hoc, quod ipſe primus obiêrim, munus ſucceſſuris exemplo præire rem literariam; ſi minùs effectu, ſaltem conatu promovendi, non inhoneſta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. acceſſit tenuis ſpes ineſſe bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi proſit, nec omnino diſpliceat. Memineris autem obteſtor qui in his literis provectior es, quale ſcriptum attrectas; non utique tibi ſoli elaboratum; non ſponte productum; non diuturnâ meditatione ſubactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholaſticas; *primùm officii neceſſitate expreſſas; tum ſubinde properantiùs effuſas, ut abſolveretur penſum, ac hora deflueret; demùm ad promiſcui literarii populi inſtructionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut fruſtrà futurus ſis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obſis, ac mihi) accuratum hìc quicquam, affabrè poſitum, aut concinnè digeſtum ſperans. Enimverò, quò tibi ſatisfacerem, expediret ſcio multa detruncare, meliora ſubſtituere, pleraque tranſponere, omnia ad incudem limámque revocare; quæ tamen adniti, nec ſtomachi mei, nec otii fuit; ſed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata ſunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipſam placituram refingere. quinimò poſtquam edendi propoſitum inii, ſeu faſtidio correptus ſeu novandi ſubiturum ſtudium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere ſuſtinui; verùm, quod tenellæ matres* *factitant, à me depulſum partum amicorum haud-recuſantium nutriciæ curæ commiſi, prout ipſis viſum eſſet, educandum aut exponendum. quorum unus (ipſos enim honeſtum duco nominatim agnoſcere)* D. Iſaacus Newtonus, *collega noſter (peregregiæ vir indolis ac inſignis peritiæ) exemplar reviſit, aliqua corrigenda monens, ſed & de ſuo nonnulla penu ſuggerens, quæ noſtris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem noſtræ gentis haud immeritò* Merſennum *dixero, cùm ſuâ tum aliorum operâ provehendis hiſce literis natum)* D. Joh. Collinſius, *ingente ſuo cum labore editionem procuravit. Poſſem jam alios expectationi tuæ obices ponere, ſeu veniæ conciliatrices cauſas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) niſi* Catonis *ſenioris mordaculum illud in me ſubverterer recaſurum:* Rectè ſi Amphictyonum decreto conſtrictus hæc evulgas. *Hujuſmodi ſaltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium* στοργὴ *quædam elicuit, ut excuſatior is, ac à cenſura munitior prodiret. ſin acrior ſis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvis ſtrenuè reprehendas.*

Epiſtola; in qua Operis hujus Argumentum, & ſcopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis chariſſimè) quid in Lectionibus iſtis jam prælo ſubditis præſtiterim, aut præſtare voluerim. reſponſo facilè defungi poſſem, ea dicendo præſtita videri, quæ ſingularum initia pollicentur, è quibus inſequentium methodus, materiâ, ſcopus conſtare poterunt ipsâ delibanti. verùm in ſummam, opinor, iſta contrahi vis, & ſub unum aſpectum redigi. id quidem ægrè poſſum, niſi (quod juxtà faſtidioſum ac longum eſſet) complura *Theoremata* recitando; ſed utcunque morem tibi geram, rerum capita ſuccinctè perſtringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam ſuſcipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimìs principia explicando; tum ab ipſis *Vtilia Conſectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus ſupplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, ſpeciatim primò receptas hypotheſes ad examen revoco, quatenus admittendæ ſunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere ſtudens; tum è phyſicis ueriſimilibus cauſis ipſas eliciens ac aſtruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi viſa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipſe magnopere confidam. valeant quantum valere poſſunt. Saltem hypotheſes ipſas admitti peto, ceu experientiæ conſentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypotheſibus conſtitutis, ab iis proximè generalia quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonſtrationibus firmata appono) partim à me obſervata. dein ad ſpecialia progredior, id mihi negotii ſumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriuſque, in uſu maximè poſitæ (*planæ* ſcilicet & *Sphæricæ*) potiſſima pertractem. *In Catoptrica Sphærica* (ſiquidem plana jam olim verè ſatìs, ac fuſè exculta habetur) ejuſmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum interſectiones atque limites innoteſcunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; reſpectu oculi nedum in radiationis axe, ſed extra ipſum ubicunque conſtituti. quæ certè vel nuſquam (quod ſciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata proſtant; id quod, incidentèr aliorum refutans ſententias, cùm ratiociniis perſpicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis noviſſimâ præſtratâ lege vel hypotheſi (quam *illuſtris Carteſius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter aſſignatas alicubi rationes veritati conſonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiſerunt, ipſum hactenus quiſquam (in ſcriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimìs puncta radiantia longè diſſita (ſeu quaſi parallelos emittentia radios) conſiderans, quo pacto ab ipſis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum ſymptomata* liquent, ipſorum interſectiones ac limites dignoſcuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca deſignantur, tam oculi reſpectu qui in axe, quàm ejus qui uſpiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta ſenſibiliter vicina, ſeu divergentibus radiis allucentia. ſub extremum, quò paratior ſit horum uſus, punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines ſingillatim exhibeo determinatas. Hiſce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (iſtis nempe, quæ hujuſmodi conſequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum poſteà ſpecialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales ſunt, & quomodò deſignandæ commonſtro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hiſce paſſim alia πάρεργα interſpergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

$A + B$. *hoc eſt*	A & B *ſimul acceptæ.*
$A - B$.	A, *demptâ* B.
$A -: B$.	*differentia ipſarum* A, & B.
$A \times B$.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$.	A *æquatur ipſi* B.
$A \sqsubset B$.	A *major eſt quàm* B.
$A \sqsupset B$	A *minor eſt quàm* B.
$A.B :: C.D$	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
A, B, C, D ∺.	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
$A.B \sqsubset C.D$.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A.B \sqsupset C.D$.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A.B + C.D \left.\begin{matrix} = \\ \sqsubset \\ \sqsupset \end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}\text{M.N. } \textit{Rationes} \text{ A ad B,} \\ \text{\& C ad D } \textit{compoſitæ}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\textit{adæquant} \\ \textit{excedunt} \\ \textit{deficiunt a}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\textit{ratione} \text{ M} \\ \text{ad N.}\end{matrix}$
Aq.	*Quadratum ex* A.
$\surd A$.	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
$\surd Aq + Bq$.	*Latus compoſiti ex* Aq & Bq.

Reliquas, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præſertim in analyſi tantillùm verſatus.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo ſolutus, & ſcopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod inierim conſilii rationem, paucis expediam. Cùm prius inſtitutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem deſiderantia, nec ex improviſo auſcultantibus, indè ſatis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud poſſe declinari; conſtitui, derelictâ tantiſper iſtâ, protinus in amæniores (floribus nempe Phyſicis depictos, & fructibus conſitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheſeos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Coſmographiæ, reliquæ cujuſcunque, prout occaſio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffuſa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; ſed ad ejus quaſi metropolim è veſtigio rectà procedere; primas tantum hypotheſes excutere, præcipuáque (quibus illa tam vaſta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnulla, palmaria quidem illa, ſtatim emergentia corollaria ſubtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præſertim, utilis, & fructuoſa videri poteſt; quum è principiis rectè poſitis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehenſio ſubnaſcantur.

Præceſſerat anteloquium occaſioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica ſumemus exordium; ſcientia cum primis Nobili; quam cùm peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ ſimul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Aſtronomicas rationes quàm planè neceſſaria ſit; ut Perſpectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam, quæ totæ quantæ quantæ ſunt ab ea pendent, ac principia ſua mutuantur. Ut & prætercam qualia, certè vix pretio ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; viſûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimilitèr arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis πανσόφȣ eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſûs directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſeclusâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potiùs inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda; poſtremóque forſan, ut de viſûs remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod &

Democrito jam olim, ejúſque ſequaci (dicam an ſimio?) ſuboluerat *Epicuro*. Quod ſanè malim adſumere, vel ſupponere, quam poſt tot alios operoſo niſu comprobare. Certè (quo breviſſimè tangam hanc quæſtionem) ſic in alia qualibet evenit ſenſione, (quidni pariter in viſu?) non ut ſenſus in objecta feratur, ſed ut ipſa ſe ſenſibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujuſdam ſeu projecti, ſeu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immenſam adeò circumquaque diſtantiam credamus emanare; neque quod ſic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis conſtat opacis, ad tranſmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptiſſimè, ſed ad progignendam à ſe vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quod ſi lucem ipſe profunderet, inſitíſque radiis attingeret objecta, quidni denſiſſimis in tenebris hoc præſertim faceret, & feles vel (Hiſtoricis ſi placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indiſpenſabilis ad viſum neceſſitas eſſet? συναυγεῖας equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo ſitis, circumfuſas ſpecies quas vocant, ad oculos deportari, ſuíque perceptionem efficere, cùm à ſpeculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodiſſimè viſionem adſcribamus? ſatìs hæc illam quam adſumimus vulgarem jam hypotheſin adſtruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa viſum afficiant diverſimode, puta lux, lumen, dies, crepuſculum, colores, rerum imagines, phaſmata; nec tamen abſque luce. (Præſente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perſpicuum eſt lucis hìc præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem ſedulò penſitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diverſimodâ lucis unius operatione putemus proficiſci. Cùm nempe lux ſit illud quicquid ſit quod à corpore lucido (quale ſtella, ignis, flamma) proveniens immediatè viſum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuſcula quædam opaca (ſeu lucem non penitùs excipientia) τῷ διέχοντι interſperſa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes reſiliens; quæ ſcilicet in oculum itineri ſuo expoſitum tumultuariè delapſa confuſam quandam apparentiam excitat; quàm, ſi fortior ſit, eique prorogandæ lucens præſtò ſit, appellamus diem; at ſi debilior fuerit, ejúſque fons abſceſſerit, crepuſculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit majuſculis, & aliquatenus ſtabilem ſuarum partium ſitum retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, diſpoſitione, textura, hoc vel illo modo) detorta vel utcunque repercuſſa; nimirum ut ejuſmodi corporibus illapſa lux vel motu ſuo, vel agendi virtute, vel ipſâ quantitate ſuâ (quoad raritatem intelligo, vel denſitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi diſcrimine diſpares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus inſignimus. Imagines autem nil planè ſunt aliud, quum lux ab objectis ita reflexa, vel refracta, ut rurſus in unum locum, talémque recolligatur ſitum, qualem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret objecto; directóque verſus oculum itinere procederet; quo fit ut ſimiliter objecta, ſed tanquam alibi collocata repræſentent. Phaſmata deníque ſunt imaginum quaſi colores, pro lucis diverſa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diverſa variati. Craſſiuſculè jam iſta proponimus; quorum forſan aliqua ſaltem in dicendorum progreſſu magis eluceſcent.

VI. Cùm itáque lux in viſione peragenda, diverſiſque procreandis apparentiis ità quaſi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud ſenſum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò diſpiciendum venit. Et ejuſce quidem de natura à Phyſicis magnoperè deſceptatur; an puta ſit corporea quædam ſubſtantia, an qualitas; an actio tantùm, aut motus quidam; de productione quoque conſequentèr ejuſdem, & propagatione diſquiritur, utrùm continuo per medium tranſitu, vel medii duntaxat impulſu, vel ſuâ ipſius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæſtiones curioſè non eventilabo. Quod iſtam ſaltem ſententiam attinet, quæ lucem accidentium claſſi accenſet; quando veris corporeis effectibus (quales ſunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, ſenſum afficere) veræ ſubſiſtentes cauſæ, veri locales motus aſſignari debeant; neque quomodò meræ qualitati, vel accidenti cuipiam iſta competant intelligere mihi datum ſit; quinetiam quo ſeſe pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perſcrutantibus Philoſophis haud pauci ſe parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hic miſſam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπόῤῥοιαι, de lucidi corporis viſceribus emanántes, totúmque nobis & ipſi interjectum ſpatium quàm perniciſſimè tranſcurrentes lucem conſtituant; vel an illa potiùs nihil ſit aliud quàm ipſius lucentis actio, contigua ſibi corpora prementis ac impellentis, iiſque mediantibus alia quæ adjacent; tum & horum interceſſu rurſus alia proximè ſuccedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ ſerie; vix auſim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut cenſeam utroque ſubinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulſum; ſatiúſque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protenſum exiguæ lampadis flammula ſe vividè conſpiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpoſitum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu ſuppeditandæ profluviorum copiæ par ſit; quomodo dum ea profundit non ipſum pluſquam exhauriatur, & confeſtim evaneſcat, haud facile capio. Cùm verò rurſus lucis inflectiones, illáſque qui conſequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulſus facit ſatis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præſternam expedit, iis quas mox tradam hypotheſibus nonnihil explicandis congruum; hoc ſe modo, vel non abſimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem eſſe quandam corpuſculorum ultrà pene quàm cogitari poteſt minutorum & exilium; horum autem unumquodque vehementiſſimo motu percitum, aliquò (ſecundum legem iſtam naturæ ſatìs receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumſtare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaverſùm liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exiliſſimis quidem & illis, aſt priorum reſpectu bene craſſis & ſolidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interſtitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum craſſiorum corpuſculorum occurſu progreſſum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi ſuperficie verſantur, aut ab ea ruunt corpuſculis; ut neceſſe ſit iis ſic inhibitis, atque repulſis introrſum ſe recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejuſdem naturæ corpuſculis) aliquatenus intra ſuos cancellos reſtringatur, nec toto ſtatim in auras expanſa diſſipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ curſum ſuum rectà continuare, materiam inibi deprehenſam haud ità fortiter obſiſtentem in fugam agentia, & ante ſe protrudentia; quorum veſtigiis alia de lucido corpore ſimiliter prodeuntia prorſus inſiſtent, longúmque ſimul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ ſerie procurrentem. Quin & iſtorum fortè nonnulla memoratas medii craſſiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipſas quoque cedere cogant, & ſecum conſpirantes in directum adjacentia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè ſuccedentibus vim inferent, & ità continuò, ſic ut ſimul & ſemel indefinitè protenſa talium corpuſculorum ſeries promoveatur, & antrorſum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius conſuevit appellari. Ità quidem rem exiſtimo ſimpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc eſt ejuſdem fermè magnitudinis, ſoliditatis, ac figuræ partibus conſtans, & ſimilibus interſtitiis pervium; at ſi medium occurrat aliter affectum, è diverſis quippe ſecundum quantitatem aut figuram particulis compactum, poriſque laxioribus, aut ſtrictioribus pertuſum, cujúſque proinde materia vel promptiùs cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius ſeu curſûs, ſeu impulsûs vim, effectúmque demutari; quin & ſi novi medii ſuperficies ita tranſeunti lucis amni ſe obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Ariſtoteles* vocat, eo nomine (quas nunc diſtinguere ſolemus) reflectionem ſimul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti tranſitum pernegat, aut prementis impetum inconcuſſa ſuſtineat, aliò tota quò facillimè poterit & directiſſimè, regredietur & reſiliet; aliò vim ſuam quam retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujuſmodi verò corpus lucem non ſuſcipiens eatenus opacum, (Hoc eſt terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo priſco tellurem deſignante) appellatur; quatenus autem ſibimet incurrentem aliò projicit, illuſtratum dici; quatenus objecti ſpeciem redhibet aſpicienti, ſpeculum.) Quòd ſi verò materia luci progredienti ſic obviàm facta tranſitum utcunque præbeat, ejuſve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis ſuæ quantitate aliquantùm hinc variatâ ſimul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem poſthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire ſolet (ſubnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perſpicuum, diaphanum, tranſparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progreſſum ὁλοσχερῶς (omiſſis quæ adjungi poſſent pleriſque minùs ad noſtrum propoſitum ſpectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypotheſibus, quos communiter adſumunt Optici; quæque neceſſariò debent huic extruendæ Scientiæ præſterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod inſtituto noſtro ſatis eſt) talia dari poſſe non minùs ipſâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheſes præcipuas ſubjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII. 1. Radii lucis (hoc eſt lucidi tranſitûs aut impulſus quales deſcripſimus tramites) in eodem exiſtentes ſimilari medio directi ſunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipſam, Phyſicéque loquendo figurâ priſmaticos eſſe, vel cylindricos. Nempe corpuſculum illud quodpiam in lucidi ſuperficie poſitum, à quo radius originem ſuam ducit, dum à primò ſuo loco ceu baſe defertur aut totâ ſuâ ſuperficie contiguum ſibi corpus rectà propellit, figuræ ſuæ (vel impulſi ſaltem corporis figuræ) congruum deſignat, ſuper hac vel illa baſe conſtitutum, ſolidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut priſma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, iſtos radios pro rectis lineis habere poſſumus; tum quia reverà ſunt adeò tenues & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejuſmodi ſeu priſmaticis figuris ipſarum axes ità ſumi poſſunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illuſtrati) puncto ad quodvis medii (non obſtaculis interciſi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritiſſima ſuppoſitio quò vel intelligi vel admitti poſſit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è ſupra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præciſè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Phyſicam; verùm ſaltem admodum exiguam, qualique ferme minorem vel animo deſignare nequeamus; alteram ut non in unoquoque ſtrictè dicto temporis inſtanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, ſed ut nullum temporis intervallum ſentiri poſſit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipſum à quavis lucidi deſignabili parte deſignatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum iſtæ quas aſſignavimus radices, lucidum componentia corpuſcula, ſint illorum, quorum nos utcunque quantitates ſenſu vel animo pertingere valemus, corporum reſpectu tanquam infinitè parva, nec non infinità quaſi pernicitate donata, non difficilè concipi poteſt in omni deſignabili, vel imaginabili lucentis ſpatiolo prorſus innumerabilem eorum multitudinem exiſtere, quorum fere ſingula diverſas in plagas tendunt; ut nulla ſit deſignabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam ſaltem, utlibèt imperceptibilis & anguſti, temporis moram interponendo. In eo ſiquidem tempuſculo lucidi partes ſingulas innumera ſucceſſivè talia corpuſcula ſubingrediuntur juxta deſerúntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad deſignatum medii ſpatium tendat, ſibi tranſmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tanquam infinitos ſupponere fas eſt) idoneum reperiens. Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod alias rigidè ſumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diverſas in partes contendere, vel adniti; ſed nec eandem præciſè medii partem è diverſis locis accedentes corporum motus excipere quiſquam conceperit, opinor, aut ego conceſſerim; non certè magìs quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura ſimul corpora ſuſcipere; ad iſtum modum intellecta dicta ſuppoſitio totam unà cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Phyſicam permiſcebit. In noſtro rem explicandi modo nihil durius obverſari video, quàm ut hinc divinæ potentiæ, ſapientiæque vis magìs eluceſcat, in luce ſic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehenſibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorſus ei neceſſariæ fuerunt, ut ſenſionem efficeret, & reliqua tam utilia ei deſtinata munia obiret. Sanè lucis corpuſculum unum ab arenula quavis litorea pluſquam eâ fortaſſis proportione ſuperatur, quâ tota quanta quanta eſt mundana moles arenulam iſtam excedit; id quod non ita cenſebit abſonum, quiſquis ad complures ſatìs obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum eſt porrò duas has fundamentales hypotheſes, ſic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illuſtrati quæcunque deſignabilis particula conſpicitur oculo, repræſentatur in ſpeculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò ſtatim oculo ſubducitur, & penitus obumbratur, ſi quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum ſufficit trajiciendis radiis quibus tota quanti is objecti facies obverſa depingatur. Et porrò quam nullà poſſit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perſpiciliorum uſus apertiſſimè monſtrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, ſiquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc eſt in ſe, vel in ſuam retro ſemitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypotheſis; & rationi quoque conſentanea eſt; nec enim ulla poteſt excogitari cauſa, cur in unas potiùs quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò ſi verum ſit omne patiens, aut percuſſum vim inferenti poſitivâ quâdam vi repugnare, perſpicuum videtur eò reſiſtentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejúſque conſequenter effectum abſolutè loquendo, tantùm illic deprehendi. Quod ſanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipſam hypotheſin ad omnimodos incurſus extendere; ſeu generatim effari, quod pulſus omnis & motus, utcunque medio cuilibet impingens, directè (per ſe nimirum, propriè, diſtinctéque rem æſtimando) continuatur, aut prorſum aut retrorſum. Scilicet, exempli causâ, ſi duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam preſſione vel impetu adigantur, exiſtimo medii ceſſione vel reſiſtentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ ſemitâ antrorſum verſus I K, vel retrò verſus C D derivari, ac perpendicularis ipſius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii ſuperficiem baculi perpendicularis tendentiæ magìs opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulſum rectà continuari, ſed obliquum alio detorqueri; vel aſſertionem ipſam non agnoſco, vel non admitto conſequentiam. Enimverò ſi per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, ſeu obſtare rectà pergenti, non minùs eo modo ſuperficies E F opponitur baculo C D, quàm ipſi A B; rectum enim ejus progreſſum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm ſi quam aliam neſcio quam imaginariam oppoſitionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè conſectari. Profectò rem abſtractè, nec ut accidentarium quid immiſceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem conſiderare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim ſola reſiſtendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulſui ſolum punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii ſuperficies obtinere ſitum concipiatur. Punctum autem Z æquè pulſui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K verſus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H verſus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par eſt, quibus uterque baculus ipſum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriuſque pulſùs quoad oppoſitionem eſt ratio; ſimiliſque proinde utrobique reſultabit effectus; pulſum nempe recto tramite vel tranſmittere, vel rejicere. Verùm longè ſecus eveniet, ſi baculum alterum obliquum, ſeu P D Y Q, cum ipſo A B Y Z conferamus. Etenim ſuperficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulſui magìs opponitur, aut obſiſtit, quàm motui vel impulſui baculi P D Y Q. Quoniam illi toti cum tota ſui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua diſcrepantia neceſſariò diſpar effectus conſequetur, ut nimirum pulſùs aut motûs directio mutetur. Quod diſcrimen eò lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adſimili) lucis radios

Fig. 1.

dios diverſo medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; ſaltem eò ſpectantia lucis præcipua ſymptomata, tribus porrò ſubjiciendis hypotheſibus comprehenſa, vix aliâ ratione commodius explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc ſubinde generali nomine, compendii cauſâ, tam refractionem, quàm reflectionem complector) fit in ſuperficie ad medii inflectentis ſuperficiem perpendiculari, ſeu recta. Hujuſce ſuppoſitionis haud ullam facilè ſatìs commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehenſibili quâdam obſcuritate laborat quicquid fermè eò ſpectans afferunt; neque valdè miror radium lucis ſemper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidiſſe; quo poſito vix probam ullam ejuſce rei cauſam aſſignari poſſe credo. Cadat enim radius linearis A B in ſpeculi (inſtantiæ gratiâ) plani ſuperficiem ad punctum B; per
Fig. 2. quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D ſint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in iſto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F ſunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obſtat quo minus in ſingulis omnibus, hoc eſt infinitis planis, ſpeculi ſuperficiem ſecantibus, & per rectam A B ceu communem ſectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus diſpergatur? cur hoc fieri non poſſit, utique non capio. Quod reſpondetur enim, poſito plano A B C ad ſpeculi ſuperficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis ſpeculi ſuperficiei contrarium eſſe, proindè reſiſtentiam in eo maximam contingere, proptereáque radium in eo potiſſimùm inflecti, parùm ſatisfacit; quoniam, ut ſuperiùs inſinuatum, extra punctum ipſum B, cui radius impingit, alia nulla ſpecularis ſuperficiei pars meritò venit conſideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in univerſam quà longè latéque diſtenditur, ipſius ſpeculi ſuperficiem agit hic linearis radius, & ab ea viciſſim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quouſque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulſui tantùm id ſpeculi quod eſt in recta A B verſus G protracta reſiſtit, ideò pulſus in ipſam A B rejicietur; Et nulla ſuccurrit cauſa ſontica, propter quam aliorſum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam aliò determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ aſſignantur, hujus effecti cauſis excutiendis abſtineam, indè genuinam ejuſce rationem (ut & generatim omnium

quæ circa radiorum inflectionem primitùs obveniunt) exiſtimo petendam, quod lucis radius non mera ſit linea, verùm dimenſionibus omnimodis præditum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut priſmaticum, pro figura corpuſculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illuſtrandi propoſiti ergò, Parallelepipedum A B C D E F G H lucis radium obliquè ſpeculo incurrentem repræſentare; Fig. 3. cujus latus B F applicetur ſpeculo, dum interea reliquum ejus ſupra ſpeculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogramum A B F E, nè recta procedat; indè continget rectam B F aliquò ſupra dictum planum reſilire. Verùm in allas ſaltem partes fiet hæc reflectio, ſecundum quas rectus radii progreſſus, quoad ejus fieri poteſt, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectiſſimum curſum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) ſi perfectè nequit, at tamen ut proximè conſequetur. Itaque cùm inter plana latera A B D C, E F H G ſibimet oppoſita curſus ejus anteà dirigeretur, & objecta ſuperficies nihil jam obſtet, quo minus inter eadem plana, tametſi ſurſum excuſſus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa ſemitam ejus contineri; locumque ſeu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterùm eſt planum A B D C, eíque oppoſitum E F G H ſpeculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideò lateralis recta B F in ſpeculi plano exiſtens, planis ABDC, EFHG recta. Quocircà ſi totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem ſuam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quaſi linea cenſeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in ſuperficie ad ſpeculi planum recta. Non diſſimili ratiocinio, ſi radius cylindri recti figura præditus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulſo producetur, id ſi Sphæricum fuerit) etiam radius in ſuperficie plano ſpeculi recta reflectionem oſtendetur ſubire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus A B D C; cujus baſes A M C N, B O D P, axis X Z; Fig. 4. ità ſcilicet, ut baſis B O D P ſpeculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè ſurgens ſupra planum emineat. Baſis autem diametri B D, P O ſeſe normaliter ſecent; ac per ipſam P O, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum P O M N. Si jam per hujuſce latera M O, N P ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis cauſis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipſa definiri. Sunt autem hæc plana ſpeculi plano recta. Sit enim recta G B H communis ſectio circuli B O D P, planíque ſpecularis; hæc utique circulum continget; (quia ſpeculi planum, ex hypotheſi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeóque nec recta G H) quare rectæ G H, O P ſunt parallelæ. Ergo P O eſt ad ſpeculi planum parallela. Huic verò perpendicularia ſunt plana prædicta cylindrum contingentia per M O, N P ducta; axi parallela. Quapropter eadem ſpeculi plano recta erunt. Hinc, ut anteà, ſi totus radius habeatur inſtar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in ſuperficie ad ſpeculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejuſmodi duo plana; quæ proinde ſi nulla ſupponatur, in unum illa coaleſcent. Accommodari poſſent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem ſupra deſcripſimus, utcunque nonnulla demutando; ſed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

I. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingreſſi ſumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheſes (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus inveſtigandis, nec non apparentiarum quarumcunque cauſis explicandis) neceſſarias, experientiæ quidem bene conſonas illas, etiam aliquo rationis ſuffragio communire; præſtratis utique fundamentis, ac ſuppoſitionibus inſiſtendo. Cùm itaque lucis radio corpus adſignatum ſit figurâ priſmaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis ſimplex, & naturæ totas ſuas in agendo vires exerenti præſertim conveniens;) cùm & exinde progreſſus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra ſuperficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus tranſverſæ dimenſionis illius, vel intervalli ſuperficies iſtas dirimentis ad rem noſtram, illam ſaltem quam nunc attingimus ſpectans effectus, aut uſus ſit) brevitatis & perſpicuitatis cauſâ, velut unam habere poſſumus; adeóque jam radium ut duabus ſolummodò dimenſionibus præditum, & ad inſtar Parallelogrammi cujuſdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis ſuperficiem recto jacentis, conſiderantes, reliquam itineris quod perſequitur determinationem, ultimam illam & completam, inveſtigabimus, ac exponemus; cujuſce quidem circa reflectionem inquiſitionis conſectaria reſultabit hæc propoſitio, paſſim ab Opticis recepta:

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad ſpeculi, vel opaci reflectentis ſuperficiem angulos conſtituunt æquales.* Hujus effati declarationem ſic exequimur. Parallelogramum rectangulum A B C D lucis repræſentet radium obliquè plano ſpeculo E F incidentem. (Recta ſcilicet E F ſit communis ſectio plani ad ſpeculum recti, in quo dictum Parallelogrammum exiſtit, & in quo, ſecundum præmiſſa, reflectio peragitur, cum plano ſpeculi.) Cum itaque Parallelogrammi punctum B ſpeculo primum impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præſtruximus) retrò verſus A per ipſam rectam B A reſilire. Cùm autem intereà rectæ B D ſupra ſpeculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obſtaculo pari vehementiâ curſum quoque ſuum adnitatur promovere per rectam C D H; palam videtur utriuſque conatibus adverſis non aliter faciliùs aut propiùs ſatisfieri poſſe, quàm ſi utrumque circa punctum Z rectæ B D medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent curſu deflectent; ſiquidem rectæ B A, D C circulum B β D δ tangunt, centro Z per B & D deſcriptum. Cùm autem hujuſmodi motum circularem obeundo punctum B deſcripſerit arcum B β, & punctum D arcum D δ, hoc eſt quando recta B D obtinuerit ſitum β δ, etiam ipſum punctum D ſpeculo impinget ad δ; reditúmque proinde per arcum δ D, ſcilicet ipſius quoque jam interciſo curſu, molietur; Sed & nunc temporis ipſum punctum B ad β poſitum per arcum β D tendit; quorum certè motuum adverſantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo ſaltem, quoad fieri poterit, utrumque progreſſus arripient; proximi vero ſunt qui per tangentes βα, δκ; qui & ſibi nihil repugnant, at potiùs omninò ſecum conſpirant; itaque punctum B per rectam βα, punctúmque D per rectam δκ procurrent, adeò ut totus radius A B D C jam acquirat ſitum αβδκ; & per hanc orbitam rectà motum ſuum proſequatur. Liquet autem angulos ABF, κδE æquari. Nam æquantur anguli Z B δ, Z δ B; quapropter adjunctis hinc indè rectis ZBA, βδκ toti A B F, κ δ E pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis reſiduos A B E, κ δ F æquari; quod propoſitum fuit oſtendere. Fig. 5.

III. Ità de præmiſſis ſuppoſitionibus noſtris fundamentalem hanc Catoptricæ legem ſeu regulam elicimus, quàm veriſimiliter aut concinnè penes vos eſto judicium. Non diffitebor autem aut penitus diſſimulabo non eſſe nihil quod his objici poſſit, & dubitandi cauſam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando ſolum punctum B verſus A renitatur, & totum lineæ B D quod ſupereſt partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipſa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs iſta gyratio concipiatur peragenda? g. 6. Reſpondeo quàm breviſſimè (quoniam incitato curſu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura conſtanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ ſibimet adverſæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus ſe, motúſque ſuos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contraniſmum, atque conflictum amittere neceſſe habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardiſſimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque niſi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant aſſequi poſſint, id ſtatim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obſequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum exiſtere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipſum mobile libretur. At pluribus abſtinens ad refractionis præcipuam legem haud abſimili diſcurſu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam diſſimili perſpicuo (nimirum homogeneo quoad ſe) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti ſinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales ſint rectis ſinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, ſtabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræſentans impingat planæ ſuperficiei E F pellucidi medii (vel ſit recta E F ſectio communis, ut in caſu præcedente, quod & abhinc ſemper intelligatur) progreſſum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium iſthoc ſubingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, ſeu peripſam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum ſuum priorem adurgebit in recta C D H Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque poteſt rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conſervare) quàm proximè conſequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta ſitum, puta quale Z, rotentur; ità ſcilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs reſiſtit, aut retardat; ut & denſius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum deſcribit arcum majorem D δ; punctum B tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum Bβ delineet; quibus peractis recta BD tenebit ſitum βδ. Cùm verò jam punctum D denſius quoque medium interet ad δ; proindéque pariter & ipſum retardetur; motus iſti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velociùs feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs ſimul arcum deſcribet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deſerentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δκ, βα; radiúſque totus ABCD hoc modo detortus, & ſitum αβδκ nactus per hanc poſteà ſemitam rectà decurret. Adnotandum eſt autem quæcunque ſit rectæ AB ad rectam EF inclinatio arcus Dδ, Bβ (vel ſemidiametros ZD, ZB) eandem ſemper habere proportionem inter ſe; talem nempe, qualem in denſitate, ſeu reſiſtentia peculiare diſcrimen exigit. Etenim ſupponatur in quovis ſuperficiei pellucidæ loco poſitum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypotheſi ſit homogeneum (hoc eſt ubique pariter obſiſtens) nulla poteſt, opinor aſſignari ratio cur hoc mobile non in quaſvis partes æquâ velocitate deferri poſſit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit iſthac dirigentem) per rectam OBQ, ac in N per rectam ABN. Adeóque radii lucidi AB, OB utcunque differenter inclinati parem omnino reſiſtentiam invenient; punctum, inquam, B, ſeu verſus Q, ſeu verſus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio ſemper eâdem, quæcunque fuerit ejus poſitio, celeritate promoveatur, ſatis apparet motus iſtos, aut motuum ſemitas eodem tempore decurſas, arcus nempe circulares Dδ, Bβ ſemper eandem inter ſe proportionem ſervare; nimirum illam, quam habent ſemidiametri ZD, ZB, vel Zδ, ZB; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem eſſe patet cum illa, quam habent recti ſinus angulorum ipſis Zδ, ZB in triangulo ZδB oppoſitorum, ipſorum ſcilicet ZBδ (vel ZBE) & ZδB. Eſt autem angulus ZBE complementum anguli ABE, (hoc eſt angulus inclinationis rectæ AB ad EF) & angulus ZδB eſt complementum anguli Fδκ, vel inclinatio rectæ δκ ad eandem EF. Igitur abunde liquet propoſitum. Patet verò, quod in hoc caſu, angulus EBZ major eſt angulo BδZ; vel, ductis BM, δN ad EF perpendicularibus, quòd angulus MBG major eſt angulo Nδκ; adeóque quòd hic refractio verſus perpendicularem, quod aiunt contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium tranſit, ipſi magis obſiſtens, ſeu denſius. At ſi medio incurrit faciliorem tranſitum præbenti, ſeu rariori, planè ſimili modo, ſed inverſè ſe res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod (licèt breviùs) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, pérque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in α ϐ κ δ; quòd etiam hic radius α ϐ κ δ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeo verum ſit; majoris etiam evidentiæ causâ; preſertimq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ priùs figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velocius procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod in recta B D, puta circa Z; itâ ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B ϐ, & punctum D arcum D δ; puncto D ad δ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; ambóque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes ϐ α, δ κ (rectæ Z ϐ perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z δ, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z δ, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B δ, Z δ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ δ κ; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hìc ang. Z δ F major eſt angulo Z B δ, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

Fig. 9.

V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

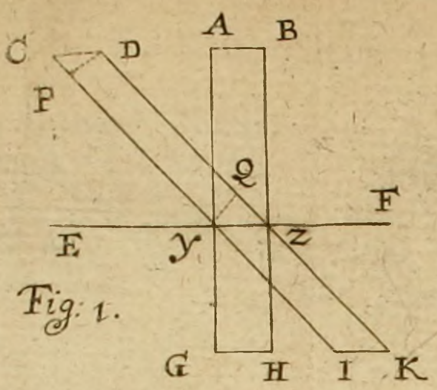

C
D
A
B
P
Q
F
E
y
z
G
H
I
K

Fig: 1.

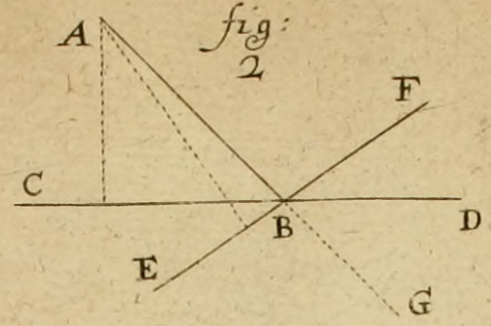


fig: 2

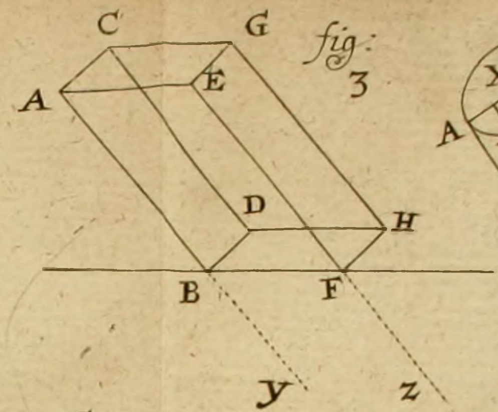

C
G
A
E
D
H
B
F
y
z

fig: 3

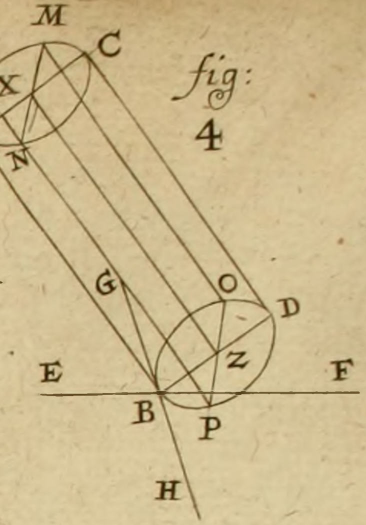

M
C
X
A
N
G
O
D
E
Z
F
B
P
H

fig: 4

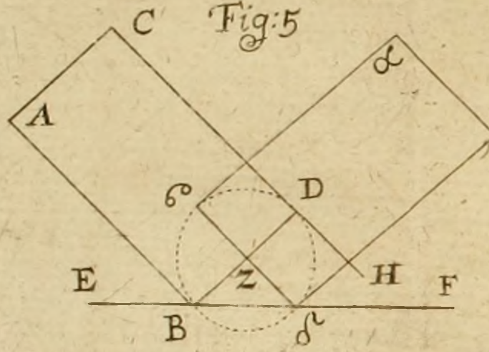

C
A
α
x
6
D
Z
E
H
F
B
δ

Fig: 5

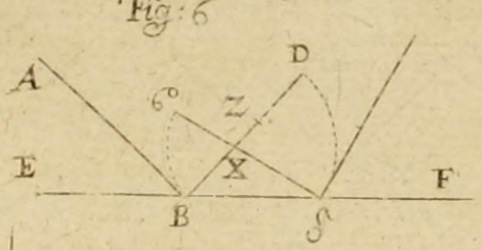


Fig: 6

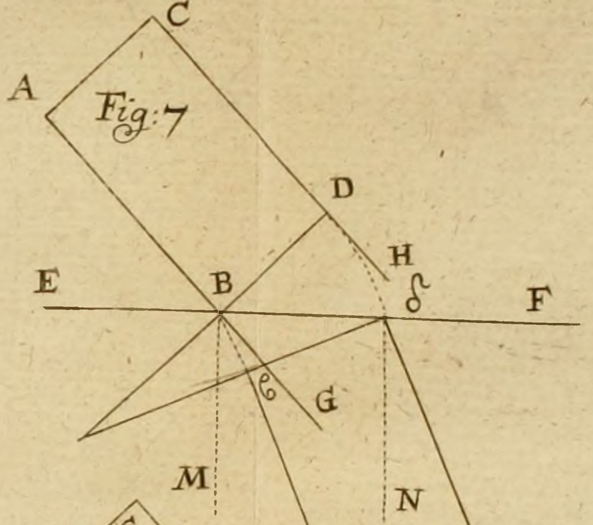

C
A
D
H
E
B
δ
F
6
G
M
N
x
α

Fig: 7

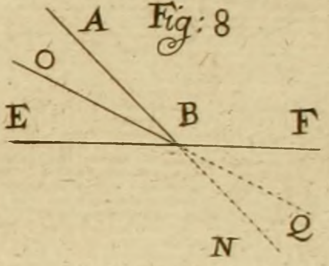


Fig: 8

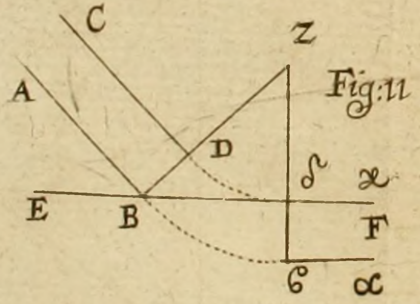

C
Z
A
D
δ
x
E
B
F
6
α

Fig: 11

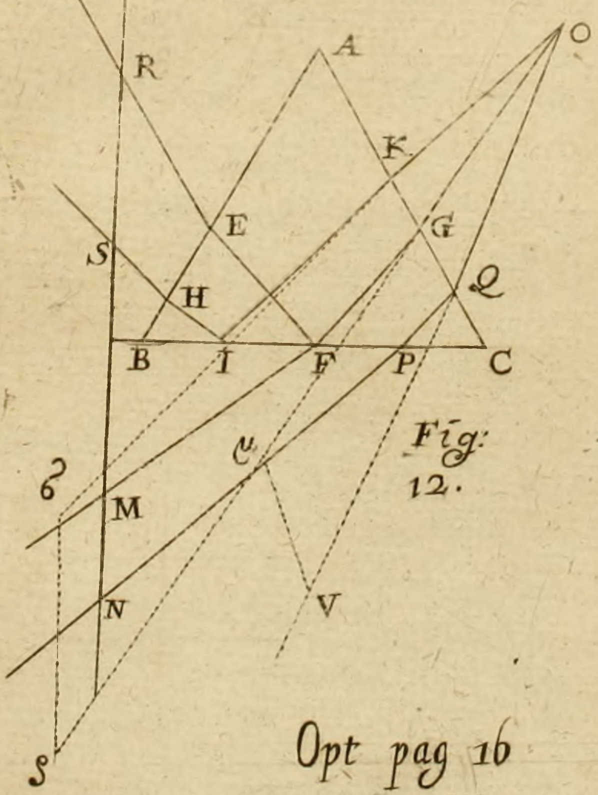

R
A
O
K
E
G
S
H
Q
B
I
F
P
C
6
u
M
N
V
s

Fig: 12.

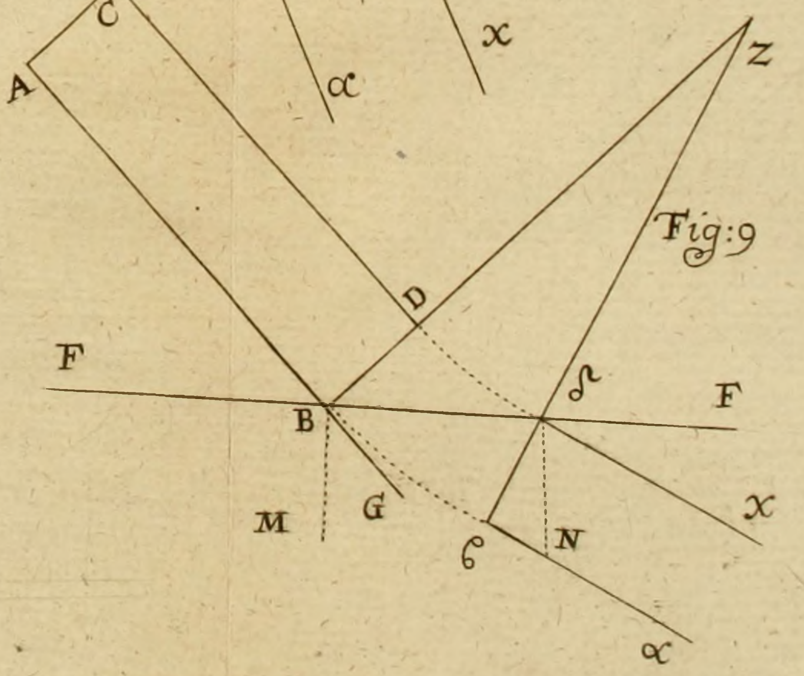

C
A
Z
D
F
δ
F
B
M
G
6
N
x
α

Fig: 9

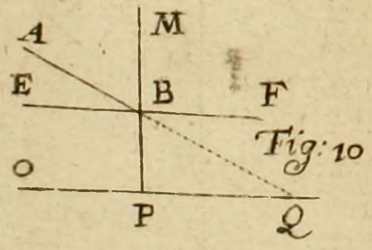


Fig: 10

Opt pag 16

1

cujuſmodi quippe de cauſis diaphanum ſubinde forſan evaſurum eſt opacum, & inſtar opaci radios valebit repercútere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro ſubſtracto vitrum munitur. Dum lapis *e.g.* obliquè impingit ſuperficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protenſa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, ſi major hic renitentia deprehendatur, quam ubi radius alter M B P perpendiculariùs incurrit, quando major ſit B Q, quam B P.] At nos ſecluſis iſtis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter reſiſtens, abſolutè perſpicuum, & radios ex ſe non reſpuens accipimus; quibus ſuppoſitis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium denſius penetrabit. Verùm in alterò caſu, cùm de medio denſiori lux rarius incurrit, non ſemper ea medium hoc permeabit. Nam ſi magna ſatìs fuerit obliquitas; ſubinde radius inflexus ſupra ſuperficiem E F attolletur, angulúſque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exſuperabit; quinimò fieri poteſt ut ipſum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel ſemirecta; Et Z B ad Z D ſe habeat ut quadrati diameter ad ſuum latus quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aerem tranſeuntium, experientiâ conteſtante, rationem metitur) radius velut in ipſam E F refringetur, aut eam ſtringens procedet. Eſt enim Z δ (æqualis ipſi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque δ κ arcum δ D contingens ipſi E F congruet. Unde patet obiter, id quod ſuperiùs inſinuatum, non univerſim conſtare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud proceſſit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim ſaltem in caſu radius A B refringitur in ϐ α ſuperficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per α ϐ progreditur minjmè recedet ad B A, nec ullam, ut manifeſtum eſt, omninò refractionem patietur. Sed hic caſus tantùm unus, & quaſi pro nullo cenſeri poteſt. Quod ſi, ſervatâ quoad denſitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus ſupra ipſam E F aſſurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decurſâ rarius intra medium peripheriâ B ϐ in denſum remeabit; in quo proinde rurſus, circulatione ſuâ dimiſſâ, per tangentes ϐ α, δ κ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium denſius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etſi quodammodò, velutíque primariò, ſit refractio) reflectionis nomen adſciſcit hæc actio, quatenus & ipſa reflectionis leges examuſſim obſervat. Nam quoniam iſoſcelis trianguli Z B ϛ anguli Z B ϛ, Z ϛ B ſunt æquales, etiam anguli (de rectis reſidui) A B E, α ϛ F pares erunt; quod reflectioni proprium eſt. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen cauſam, fortaſſis ab iis prætermiſſam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis cauſa diverſam; nè quiſquam hæſitet, aut hoc adſumenti gravetur concedere. *Kepl. prop.* 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum ſaltem breviter attingam ſatìs illuſtre, neminíſq; non examini patens. Eſto triangulum A B C ſectio priſmatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, ſeu cryſtallini) baſi parallela; in hujus autem baſe ſumatur punctum quodpiam F, & ſit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hìc inſinuatam, & poſteà clariùs exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo ſcilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quaſi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O ſtatuatur oculi centrum O; & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipſorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti ſecundum principia noſtra poſthac conſtabit) progredientes divergent; erítque propter eà ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à ſe divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpoſitum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad μ ν, ſitu neutiquam immutatum. Rurſus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus ſit K I; hic itaque rurſum à G F diverget, ac indè erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad ρ σ, ſitu partium everſo. Conſequuntur hæc doctrinam noſtram, & experientiæ liquidò conſentanea deprehendentur, quin & obſervatu dignum erit, è duplici refractione ſpectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro ſcilicet ad μ, cæruleo ad ν, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, ſed reflectione tamen intercedente, apprehenſi imaginem ρ σ colore nihil ab ipſo objecto differre. Quod ex eo ſanè videtur evenire, quoniam ang F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingreſſus eſt; Fig. 13.

ſeu quicquid retractio ad E effecit, id refractio ad K retexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verùm hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, Saltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cùm ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (à quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quòd enim vitrum *e. g.* radios intra corpus ſuum receptos, ejúſque poſticæ ſuperficiei obliquius incidentes retrocedere cogat, hujuſmodi rationem exhibent: aiunt vitrum radios faciliùs admittere, vel tranſmittere quàm aërem; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere; quódque proinde qui poſt vitrum adventanti radio fit obvius aër eum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùs conſentanea videtur. Quum enim aëris corpus ex æthere puro maximam partem, è corpuſculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur; ex his partibus æther, opinor, non minùs promptè quàm vitrum radios tranſmitti; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficiliùs; adeóque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùs interſperſæ, præſertim in aëre ſudo ſummíſque montium excelſorum jugis) ſunt opacæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnicunque pariter incidentiâ rejiciunt; adeò ut nec ad has quam reſpicimus lucis inflectio propriè ſpectet; ergò nihil ſubeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentius obſiſtat. Addo; ſi talis aëri vis reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam aſſignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut pleriſque viſum erit, poſtulato; quod purus Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſuprajectus haud minùs facile quàm vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte; per puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum O P; in atmoſphæræ, vel aëris circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam Z N M; itaque cum radius quilibet, ut S M, vel S N (Horizontalis puta, vel eò ſuperior) in ſuperficiem M Z cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmoſphæræ Semidiameter C Z præ telluris Semidiametro C O dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cùm & aër idcircò, juxta ſententiam quam expendimus, Fig. 14.

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & conſimiles reflectentur, & extra atmoſphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò ſatìs conſtare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut viſum afficere queant, aut accedere, verſus perpendicularem N C refringi debent; id quod adverſariæ Hypotheſi pariter adverſatur. Verùm hæc obiter, ac in trancurſu dicta ſunto.

IX. Porrò, ſubnotandum eſt, quoad binos caſus ſuprâ tractatos, cùm duo media, diverſimoda comparandò duæ ſe repreſentent proportiones, altera, terminorum ſitum tranſponendo, alterius inverſa, refractionum ideò menſuras (quoad hæc) iiſdem terminis deſignabiles ordine permutari. Ut ſi in primo caſu ſinus rectus anguli incidentis ſe habeat ad ſinum rectum anguli refracti, ſicut A ad B, in ſecundo ſinus incidentis ad ſinum refracti ſe inverſè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major eſt quàm Z B, in prima Hypotheſi; tanto conſtat Z D minorem eſſe quàm Z B, in ſecunda; mediis ſcilicet iiſdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit ſuperficiem hactenus adſumpſerimus planam, advertendum ſupereſt, quamvìs illa curva ſit, eodem tamen abſque ſenſibili diſcrimine ſeſe modo rem habere, ac ſi plano curvam ſuperficiem iſthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R,
Fig. 15. quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorſus eodem modo refringetur iſte radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, niſi quòd iſthic arcus D δ in rariori medio decurſus tangentem aliquouſque prætergreditur. Id quod eximiam radii ſubtilitatem conſiderando, quámque perexiguo diſtet intervallo punctum δ à curvæ vertice B, nullam omnino ſenſibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iſte circulus eſſe debet, in quo chorda B δ, radii latitudine paullo major, arcum ſubtendet aliqua cum ejus ſenſibili parte comparabilem? poteſt igitur angulus Z B δ æqualis ſupponi angulo Z B F; quo conceſſo reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin una rationem exhibuimus ſuppoſitionis, quæ paſſim ab Opticis accipitur; ita tamen precario, non ut ſubinde nullum in audientibus ſcrupulum relinquat; nec ut ſemper adſenſu firmo concedatur.

XI. Ità primarias iſtas circa radiorum inflectionem Hypotheſes (vel Axiomata mavis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica cujuſcunque generis ſcientia, qualitercunque declarare ſtuduimus, & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ ſententiâ ſaltem, omnium qui legenti ſe vel cogitanti ſuggeſſerunt, ſimillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quàm experimentis Phyſicis, & cum ipſa rerum natura congruentiſſimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm poſtquam inter alios iſta lucis ſymptomata explicandi modos hic ipſe ſemet ingeſſerat, eum examini ſubjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto ſanè præter expectationem) adeò quadrantem comperiſſem. Meæ tamen eum tam fuſè diducendi peperciſſem operæ, ſi quæ doctiſſimus *Maignanus* hiſce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priuſquam hæc aggrederer contigiſſet inſpexiſſe; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curioſius evolvi) ſupplendis his, & confirmandis accommodata. Porrò fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percenſere, ac perſtringere (quarum mihi nonnullæ craſſâ petitione laborare; multùm aliæ à re propoſita abludere; quædam animum ſubtilitate potiùs confundere, quàm vi conſtringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimiſquam immoratus, hactenus inſinuatis contentus, omnes tranſiliam; illius ſaltem eruditiſſimi viri nefas fuerit non aſtipulari penitus, & acquieſcere decreto; “qui, Deum unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem radiis diverſa media permeantibus præſcripſiſſe; ut omnes omnino radii veri, & apparentes eandem ſemper inter ſe ſervent analogiam. His, inquam, dimiſſis, ſuccedit ut è præſtructis emanantia quædam Poriſmata ſubnectamus.

LECT. III.

I. HYpotheſes Opticæ primarias, & fundamentales quaſi leges expoſuimus hactenus, & excuſſimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum cauſas tam verè quàm expeditè diſcernendas conducentia) ſubjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut uſum præ ſe ferunt potiſſimum ſeligentes. Radios autem jam conſideramus, ut unicâ dimenſione præditos (ſiquidem reliquæ, quibus Phyſicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hìc inſtitutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aſpectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admiſſo, ſinguli cujuſque radii inflectio in ſuperficie peragatur ad planum inflectens recta (uti conſtat è præmiſſis) cùm & nobis præſertim mox inſtitutum ſit ſingulorum punctorum radiationes conſequentia ſymptomata ſic expendere, ut locos ipſorum apparentes determinemus, oculi reſpectu centrum habentis in ejuſmodi plano uſpiam conſtitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis ſuperficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas reſpectivè congruas, brevitati conſulentes & perſpicuitati, ſubſtituemus. Porrò cùm quo præciſè modo peragatur viſio, quibúſque prædita ſit affectionibus adhuc expoſitum non ſit; Et de illa tamen ſubindè craſſius aliquid ac generalius dicendis intexere fortaſſis ex uſu fuerit, illa ſaltem pervulgata, poſt hac curioſiùs expendenda, jam προλεπτικῶς adſumemus; nempe: Viſibile punctum in illo radio ſitum apparere, qui procedens ab ipſo (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; ſitum objectorum è radiorum ità tranſeuntium poſitione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipſorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum reſpectivè majores, minores, aut æquales conſtituentibus; diſtinctam unius cujuſque puncti viſionem radiis effici modo naturali, hoc eſt, divergentèr, oculò illabentibus; Et ſiqua ſunt his agnata pariter obvia, ſeu manifeſta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis paſſim receptis & uſitatis definiendis aut explicandis abſtinentes, ipſorum ſupponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ cauſâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è veſtigio.

II. Imprimis autem (poſthac quidem in decurſu, quoad plures ſibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi ſingulari, quæ tractanda veniet, ſuperficiei incidentes (radios; ſingularia quotvis inflexos deſignandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis propoſito competentem inflexum aſſignandi modos proponemus; quorum adhiberi poſſit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. α B Q = ang. A B Q, vel per B ducta ſit E F reflectentem tangens; & fiat ang. α B F = ang. A B E; liquetque factum eſſe, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & ſuper diametrum (in hac liberè ſumptam) Q B deſcribatur ſemicirculus, incidentem A B ſecans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R : : Q R. T (terminis autem I, R hîc & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipſam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. ¿ Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque ſumpta B K ſit circuli diameter, incidentem A B ſecantis ad R; & fiat I . R : : B R . T; & adaptetur B S = T; erit S B α ipſius A B refractus: Vel demum: In ipſa A B ſumptâ utcunque diametro R B, ſuper hac deſcriptus circulus ſecet perpendicularem Q B ad Q; vel tangentem E F in K; fiátque I . R : : B K . T . & adaptetur Q S = T; erit rurſus S B α incidentis A B refractus. quorum ratio è poſitis inflectionum legibus admodum eſt manifeſta. verba piget impendere.

Fig. 16.

Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujuſvis incidentis inflexus inflexi viciſſim incidens evadet.

Hoc plerique, diverſè paullò prolatum, accipiunt, aut poſtulant. è præmiſtis autem facillimè colligitur. Idque potius methodi gratiâ (ſicut & nonnulla quæ ſequentur) quàm quia res meretur, oſtendemus. Pro reflectione; Radius A B ſpeculo E F impingens reflectatur in B α; dico radium B α permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B α, erit ang. α B F æqualis angulo ABE. Poſito jam α B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo α B F; proinde non alius erit ab ipſo A B E quare B A ipſius α B reflexus erit.

Alhaz. VII. 24.
Herig. Catop. Axiom. 2

Fig. 1. 16.

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B; & iſthic refringatur in B α; dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occurſum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis; & in hac utcunque ſumpto puncto P ducatur P G ad A B protractam perpendicularis, ut & P H ad B α; & producatur α B S. Eſt ergo P G ſinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P; & P H ſinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è ſuperiori medio factam in inferius; etiam viciſſim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in ſuperius. Unde ſi radius α B jam ponatur incidens; cùm ſint P H, P G recti ſinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum eſt ipſam H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde reſpectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc eſt reflectionis reſpectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis ſecùs accipiat, apud nos angulus eſt, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propoſitum ſpectat effatum, id è poſitis principiis manifeſtè conſectatur. Etenim in reflectione ipſi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales ſunt; in refractione ſaltem recti ſinus angulorum refractorum ſinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquidò conſtat propoſitum: quorſum verba, quorſum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad ſuperficiem mediam ſeſe decuſſant, iidem ſeſe inflectionem paſſi decuſſabunt, eodem ordine ſervato quem directè progedientes habuiſſent (utique ſic ut perpendiculari poſt inflectionem propior incedat qui propior anteà fuit.)

Hæc propoſitio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia noſtra uſurpante aliunde comprobari.

Herig. Diop. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens eſt; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ reſpondet. Pro refractione vero: ſit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (ſcilicet AB obliquiùs quàm D B.) Horum verò refracti ſint B α, B δ; dico angulum 6 B α majorem eſſe angulo H B δ. Nam ad B P in perpendiculari liberè ſumptam diametrum conſtituatur ſemicirculus B G P; cui occurrant ipſæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipſæ B α, B δ punctis α, δ. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B δ, vel arcus G K arcui H δ; connectatur etiam recta δ G, ſecans ipſam P K in X, ducatnurque denuo ſubtenſæ G δ, H δ. Jam ob angulos P G δ, P H δ pares (arcui quippe P δ inſiſtentes ambos) & angulos G P K, H P δ ex conſtructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P δ inter ſe ſimilia. Quapropter erit P G . P X : : P H P δ. eſt autem è lege refractionum P H . P δ : : P G . P α. quare P G . P X : : P G . P α: unde P X = P α. eſt autem P X minor quàm P K (quia tota ſubtenſa G δ intra circulum jacet.) Quare P α minor eſt quàm P K; adeóque P K ſecabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc eſt arcu H δ. & idcircò major erit angulus G B α angulo H B δ: Q. E. D.

Fig. 21.

Fig. 22.

Procedit hæc demonſtratio quoad caſum, ubi I $\sqsubset$ R (vel cùm radius è medio rariori denſius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque caſum facilè deducitur concluſio. Nam ſi viciſſim α B, δ B concipiantur incidentes, erunt ipſæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, δ B H erunt anguli refracti.

Hujuſce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonſtratio. Confer ſodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit poſuimus.

Diopt. Prop. 4.

VII. In iſto refractionis caſu, quum I minor eſt quàm R, ſi anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus ſinus P H, ad ſinum totum ſe habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit.

Fig. 23.

Nam penetret (ſi fieri poteſt) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G . P α : : (I . R : :) *P H . P B. eſt autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipſi E F ſubjectum.

* *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum ſuum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum ſuum.

Frit ſcilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P . α B P . $\sqsubset$ ang. H B P . δ B P. Nam triangula

Fig. 21, 22.

G P α, H P δ ità diſponantur, ut latera P G, P H ſibi congruant (unde major angulus G P α minorem H P δ comprehendet) tum centro P per δ deſcribatur circulus E δ F ipſas P G, P α ſecans punctis F, E; item connexâ E H, centro H per δ tranſeat circulus H M N ipſas H P, H E ſecans punctis N, M; denuò connexa E δ cum P G conveniat in L. Eſtque jam ang. α P δ. ang. δ P H : : ſector E P δ. ſector δ P F ⊏ triang. E P δ. triang. δ P L : : E δ. δ L : : triang. E H δ. δ H L ⊏ ſector M H δ. ſector δ H N : : ang. E H δ. ang. δ H P. eſt igitur ang. α P δ. ang. δ P H ⊏ ang. E H δ. ang. δ H P. ergóque compoſitè ang. α P G. ang. δ P H ⊏ ang. E H P. ang. δ H P. permutandóque ang. α P G. ang. E H P ⊏ ang. δ P H. ang. δ H P. eſt autem H P. P E : : H P. P δ : : I. R : : G P. P α. adeóque E H ad α G parallela; vel ang. E H P = ang. α G P. ergò erit ang. α P G. ang. α G P ⊏ ang. δ P H. ang. δ H P. hoc eſt ang. α B G, α B P ⊏ ang. δ B H. ang. δ B P. vel componendo ang. G B P. ang. α B P ⊏ ang H B P. ang. δ B P. Quod erat demonſtrandum.

Corol. 1. Ang. α B G. ang. α B P ⊏ ang. δ B H. ang. δ B P.
2. Ang. α B G. ang. P B G ⊏ ang. δ B H. P B H.

Opportunum eſt hoc Theorema conciliandis cum experientia propoſitis refractionum legibus. Ut demirari ſubeat nuperrimum Opticæ ſcriptorem, virum alioqui diffuſè doctum, hujuſmodi ratiocinio leges iſtas impugnâſſe: “In majoribus tamen angulis inclinationis (ipſiſ“ſima ſunt ejus verba) falſum eſſe conſtat (principium nempe no“ſtrum;) in his enim angulus refractionis major eſt ſubtriplo an“guli inclinationis; quod mihi aliiſque ex luculentis experimentis “compertum eſt. Hæc, inquam, ille ταυτοεπεῖ. Quaſi verò dixiſſet; numeri 6 & 4 ſimul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè ſimilis eſt diſcurſus; non ovum ovo ſimilius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis ſi ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15) quòd ſit angulus refractionis ſubtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare ſolemus) neceſſariò, ſicuti modò demonſtratum eſt, è principio noſtro conſequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit ſubtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium inſtitutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24′; angulúmque proinde refractionis 10. 36′, qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clariſſimus vir Hypotheſin hanc (à

Carteſio quidem primò repertam, ſed ab aliis pleriſque recentioribus opticis *Merſenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipſo ejus conſodale doctiſſimo *Ricciolo* ſuſceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parum intereſt veram deprehendi) labefactatum iret; eam potiùs imprudens experientiæ Suffragio communivit. Quinimò ſi quid inſit huic principio vitii, illud potiùs erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen diſcrepantia num ipſius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibuſdam intervenientibus cauſis adſcribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortaſſis cognata reflectionis lex, a nemine non admiſſa, experimentis omnibus præciſè reſponderet. Nobis ſufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præſertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam conſentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ concluſiones cum experientia mirè conſpirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam diſcordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud ſuppetat, Geometricis, ratiociniis præſternenda) non verebimur ubivis ut ratam ſumere, ac adhibere; ſatis certi (apud nos ſaltem) in elicitis ab ea concluſionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emerſurum.

IX. Obiter hìc & παρεκβατικῶς problemation quoddam interſeram (quia Schema num. 6. ſuperius ei gratis inſerviet, ejuſque conſtructio è ſuperiore conſtructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere, cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci poſſe ſupponimus, aut poſtulamus) & ad diametrum B P conſtruatur ſemicirculus; & ſit utcunque P G . P α : : I . R (pro P G verò præſtat ipſam diametrum P B accipere) ſumatúrque Arcus G K ſubtendens angulum parem dato. Fiat autem P X $=$ P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in δ. demum accipiatur Arcus δ H $=$ G K, erit ductæ B H refractus B δ (uti præcedentem diſcurſum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum eſſe quod erat propoſitum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig 21.

X. Cujuſcunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, ſitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque ſumpto puncto C, per hoc tranſeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipſius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N $=$ K C; in refractione verò K N . K C : : I . R. (vel item, ſi in ipſo inflexo Fig. 24, 25.

ſumatur utcunque punctum K; & ab eo ducta K L ad perpendicularem C N parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic K N = N L; & hic K N . N L : : I . R.)

Fig. 24, 25. Nam 1. in reflectione; quoniam ang. O N C = K N C (ex lege reflectionis.) Et ang. O N C = K C N (ex Hypotheſi quòd O N, C B parallelæ ſunt) erit ang. K C N = ang. K N C. adeóque K N = K C = N L: Q. E. D.

2 In refractione; ducantur C E ad N O, & C F ad N K perpendiculares (unde liquet puncta E, F exiſtere in circulo ſuper diametrum C N deſcripto) quare, connexâ E F; erunt anguli C E F = ang. F N C (eidem inſiſtentes peripheriæ F C) æquales. Item propterea eſt ang. E C F = ang. F N E = ang. N K C. quare triangula E C F, N K C ſunt æquiangula ſibi mutuo; quamobrem eſt C E . C F : : K N . K C. atqui (juxta legem refractionis) eſt C E . C F : : I . R. qua propter erit, K N . . K C : : I . R: vel K N . N L : : I . R: Q. E. D.

XI. Quod ſi per N ducatur tangens U T; erit (in reflectione) etiam K T = K N; & N T angulum M N K biſecabit. In refractione verò erit K T ad K N, ut co-ſinus anguli refracti, ad coſinum anguli incidentiæ. Quæ ſaltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Ex his facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem ſatis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortaſsè per nimias ambages.

1. Demonſtratæ proſtant. Ut in parabola (puta R B S, cujus axis B C) incidat M N O axi B C parallelus; ejuſque reflexus ſit N K; erit igitur (ex oſtenſis) K N = K C. at ſi punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notiſſimam hujuſce curvæ proprietatem) K N = K C. quare paralleli radii reflexus neceſſariò per umbilicum tranſibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig. 26. 2. Item *in ellipſe*, cujus axis B D, foci H, K, ſi ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ H N, K N; ſatis celebre eſt, quòd perpendicularis C N angulum H N K biſecabit. Unde N H . N K : : H C . C K. & componendo N H + N K . N K : : H K . C K. vel B D . N K : : H K . C K. vel permutando B D . H K : : N K . C K. quare ſi talis fuerit ellipſis, ut ſit B D . H K : : I . R. etiam erit N K . C K : : I . R verum ſi incidens M N ad B D parallelus refringatur in N K; erit (juxta mox oſtenſa) etiam N K . C K : : I . R. patet itaque quòd ipſius M N refractus per focum K tranſibit. Quid plura?

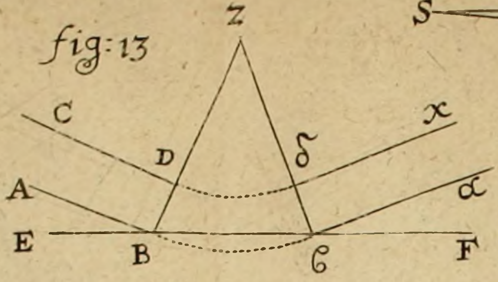


fig: 13

Z
C
x
D
δ
A
α
E
B
6
F

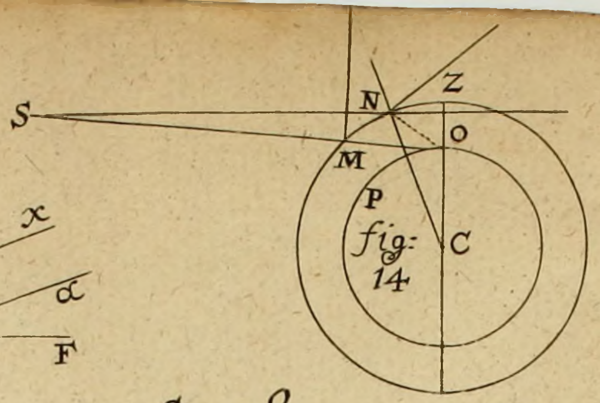


fig: 14

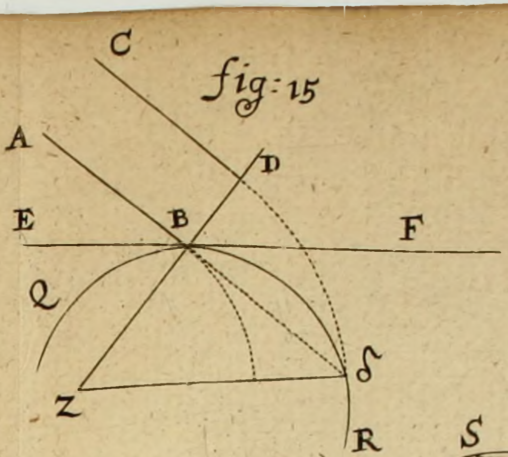


fig: 15

C
A
D
E
B
F
Q
δ
Z
R

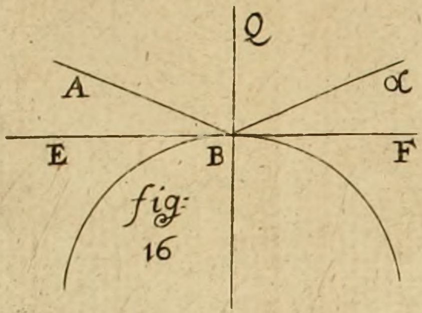


fig: 16

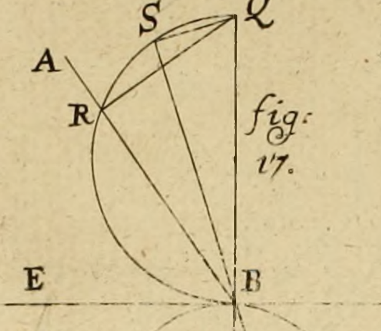


fig: 17.

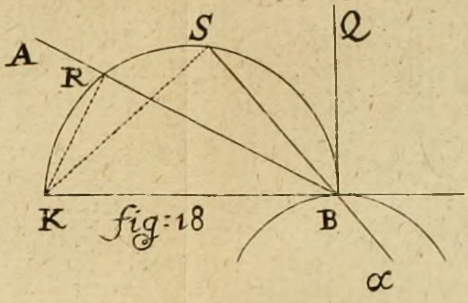


fig: 18

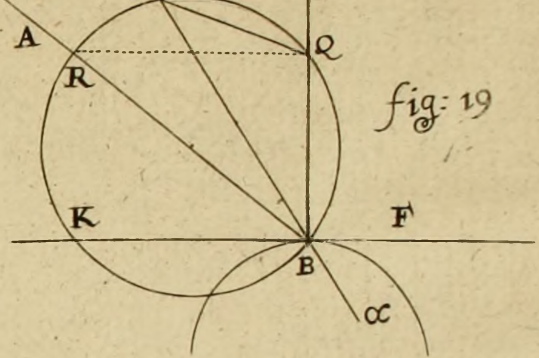


fig: 19

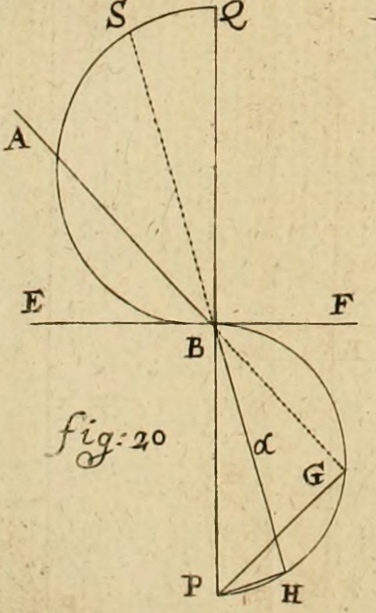


fig: 20

S
Q
A
E
F
B
α
G
P
H

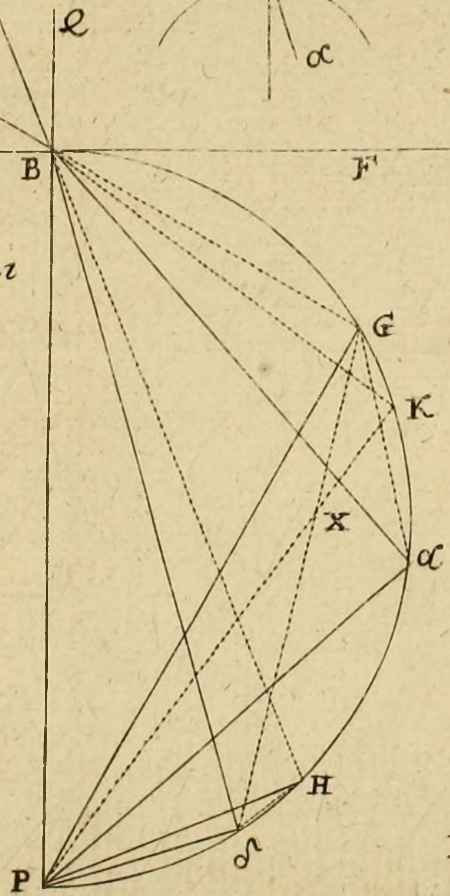


fig: 21

A
D
Q
E
B
F
G
K
X
α
H
δ
P

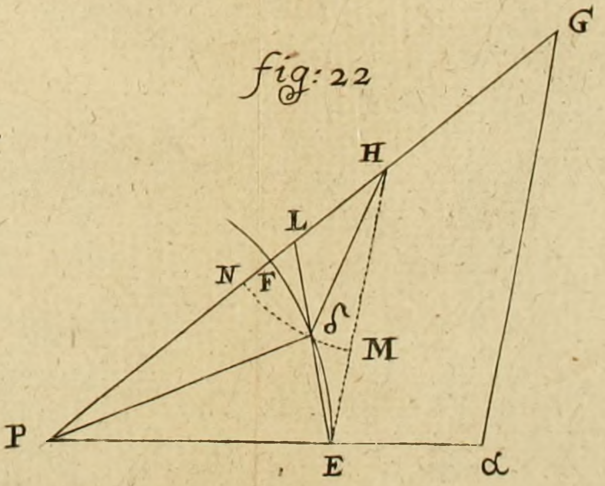


fig: 22

G
H
L
N
F
δ
M
P
E
α

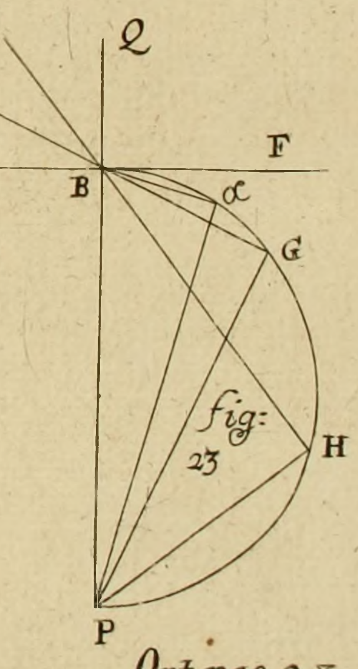


fig: 23

D
Q
A
E
F
B
α
G
H
P

Opt pag 28

2

3. Non abſimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquiſque velut antea præparatis) oſtendetur fore perpetuò N K. C K : : B D. H K. unde ſi fuerit (ex *Hyperbolæ* conſtructione) B D. Fig. 27. H K : : I. R. erit etiam N K. C K : : I. R. quod ſi radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe ſit N K. C K : : I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbolæ* focum tranſibit.

4. Quòd verò ab *Ellipſis* aut *Hyperbolæ* cujuſvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radius in alterum reflectatur, admodum facilè diluceſcit. Nam in ellipſe, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T biſecat angulum H N K. unde patet propoſitum, Hæc extra noſtras oleas poſita curſim & leviſſimè perſtringo; nec tamen ut eò multa putem deſiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generaliſſimis, ac abſtractiſſimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia deſcendamus. Ad planas verò ſuperficies (vel earum loco propter inſinuatam antehac cauſam ſubrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, breviſſimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum ſibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (B α, N μ) ſunt etiam ſibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypotheſi ſunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò ſunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N ſunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujuſvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico forè B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A, B N Z ſibi mutuo æquilatera fore; & eſſe A B = B Z: Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero Fig. 29. quodam uno prodeuntes.

Quoad punctum longè diſſitum (ſuo parallelos ad ſenſum radios ejaculante) patet è penultima. Quoad punctum è ſenſibiliter finita diſtantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI. Hinc punctum Z erit ipſius A (reſpectu oculi uſpiam conſtituti) imago perfectiſſima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quam locum a quo plures radii (quot ſcilicet afficiendo viſui ſufficiunt) ſimiliter divergere, ſeu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujuſvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, viſus imaginem adſpectantis axis, ſeu reflexus principalis (iſte nimirum qui per oculi centrum (puta O) tranſit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iſte; nec non ejus cum E F interſectio N, punctum reflectionis.

Fig. 30.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam ſubjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, ſed alioquin ſitu indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbolæ*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & biſecentur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Aſymptotis C G, C H per ipſum O deſcripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta tranſibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbolæ* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulnm A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipſam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbolæ* natura, eſt C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O—D N. D N; hoc eſt O Q. C Y :: N Q. D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rurſus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc eſt A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare eſt O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N ſimilia ſunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Mereri ſaltem vel *Hyperbolæ* gratiâ videbatur hæc ejuſce proprietas adnotari; quin & Analogiæ cauſâ verſus ea quæ ſequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereà. Ad refractiones tranſeo.

Lect. IV.

I. AD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam ſuperficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentius proſequemur, quia nondum pro merito ſuo videtur ſatis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præſtituemus nobis, & quaſi normam in ſequentibus obſervandam. Ad rem.

Fig. 31.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) ſunt etiam ſibi paralleli. Nam quoniam A B, M N ſunt, ex hypotheſi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (ſcilicet anguli α B F, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ ſibi parallelos eſſe.

Fig. 32.

III. Hinc infinitè diſtantis, hoc eſt parallelos radios emittentis (infinitam ad ſenſum diſtantiam intelligo, qualis eſt quoad hoc ſtellæ cujuſpiam) puncti locus apparens, aut imago per hujuſmodi refractionem effecta infinitè quoque diſtat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adſpectetur. Itaque ſitus ejus reſpectu viſûs ubivis poſiti facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immenſè diſſitum; connexáque A O refringentem E F ſecet in G; ſitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protenſa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B ſint (ad ſenſum) paralleli, etiam ipſorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α ſit refractus ipſius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protenſa apparebit. Quoad hujuſmodi radiationem nil ſuccurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti ſymptomata contemplemur.

Fig. 33.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua ſit punctum radians A, ab E F haud ad ſenſum longè remotum; ab hoc

autem

Lect.3.num.9.

autem procedentis cujuſvis radii (ceu A N) refractus N α cum ipſa A B (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I . R. (Neque non inverſè, ſi fuerit N K . N A :: I . R; erit K N α ipſius N A refractus.)

Fig. 34, 35.

Hoc è ſuperiùs oſtenſis immediatè conſectatur. Et hinc etiam ſatis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut paſſim in ſequentibus aſſumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum ſit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm itaque ſit hinc ſinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad ſinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A ſeſe habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam ſi latera N K, N A ſe habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum ſinus ita ſe habebunt; unde conſtabit ipſam K N α ad A N pertinere.

V. Hinc particularis emergit expeditiſſimus modus hujuſmodi quotcunque refractos deſignandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B . Z B :: R . I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens deſignandus eſt refractus. Eum ſic dedeſignaveris. Protrahatur N A (ſi opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S deſcribatur circulus ipſam A B ſecans in K (ſecabit utique ſi refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim eſt K N . A N :: S N . A N :: Z B . A B :: I . R :: K N . A N. unde liquet (è præcedente) propoſitum.

VI. Exhinc etiam hujuſmodi refractionis præcipua ſymptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ ſeorſim acceptis, & quæ ſecum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo caſu (quum nempe refractio fit è rariori in denſius, ſeu quum $I \sqsubset R$) concurſus refractorum cum recta A B (quam ſubinde radiationis hujus axem appellare licebit) ſupra punctum Z exiſtit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major eſt, erit N S (vel N K) $\sqsubset$ N Z; adeoque B K $\sqsubset$ B Z. Item, in ſecundo caſu (quum media contrariè ſe habent) dictus concurſus infra punctum Z exiſtit. Etenim rurſus connexâ N Z; eſt ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z $\sqsubset$ N S, vel N K; & ideò B Z $\sqsubset$ B K.

Fig. 35.

VII. Hinc liquet punctum Z eſſe limitem ultra vel citra quem (reſpectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quod ipſius perpendicularis A B (quaſi) refractus in ipſum punctum Z terminatur. Porrò:

VIII. *Lemma*: ſit A B ad E F normalis, & à duobus in A B ſumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipſi B) ad duo puncta quæ vis M, N in ipſa E F acceptis (quorum verò M ſit ipſi B vicinius) connectantur rectæ A M, AN; & I M, I N; dico fore A N . A M $\sqsubset$ I N . I M.

Nam centro N per A deſcribatur circulus P A O R (rectas I M, I N interſecans punctis O, R) & per R ducatur R T ad E F parallela, ſecans I M in S. Et ob angulum N R T obtuſum, patet rectam R T extra circulum totam excidere; unde S M $\sqsubset$ (O M $\sqsubset$) A M. adeóque A N . A M $\sqsubset$ A N : S M :: R N . S M :: I N . I M. liquet igitur eſſe A N . A M $\sqsubset$ I N . I M: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum A M, A N (quorum hic obliquior) refracti M α, N α cum axe A B conveniant punctis I, K, erit in primo caſu I B $\sqsupset$ K B; in ſecundo I B $\sqsubset$ K B. Etenim connexâ I N; eſt in primo caſu, N K . M I :: N A . M A $\sqsubset$ N I . M I. adeóque N K $\sqsubset$ I. unde B K $\sqsubset$ B I. aſt in ſecundo, N K . M I :: N A . M A $\sqsupset$ N I . M I quare N K $\sqsupset$ N I; & indè B K $\sqsupset$ B I. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo caſu concurſus extra angulum A B N verſantur; in ſecundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decurſu liquidius, ac multifariàm conſtabunt.

X. Porrò, bina quoad hos caſus *Theoremata* ſubjiciemus, uſus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo caſu) Y B . A B :: I . $\surd$ Iq — Rq. ſit autem cujuſvis incidentis A N refractus K N α; & connectatur Y N: erit K B . Y N :: $\surd$ Iq — Rq . R. Fig. 39.

Nam ob Y Bq . A Bq :: (*a*) Iq Iq — Rq. erit per converſionem rationis Y Bq . Y Bq — A Bq :: Iq . Rq :: (*b*) K Nq . A Nq & permutando Y Bq . K Nq :: Y Bq — A Bq . A Nq componendóque Y Bq + K Nq . K Nq :: Y Bq + B Nq . A Nq. (nempe Y Bq — A Bq + A Nq = Y Bq + B Nq; quoniam A Nq — A Bq = B Nq) Quarè rurſus permutando eſt Y Bq + K Nq . Y Bq. + B Nq :: K Nq . A Nq. dividendoque K Nq — B Nq . Y Bq + B Nq :: K Nq — A Nq . A Nq; hoc eſt K Bq . Y Nq :: Iq — Rq . Rq: Q. E. D.

(*a*) *Hypoth.*
(*b*) 4 *hujus.*

Fig. 40.

XI. *Corol.* 1. Hinc ſi duo refracti Mα, Nα cum Axe AB conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ YM, YN; erit KB. IB :: YN. YM. Nam KBq. YNq :: Iq — Rq. Rq :: IBq. YMq. quare permutatim KBq. IBq :: YNq. YMq.

XII. 2. Hinc etiam ſi refracti MI, NK conveniant in X; & demittatur XP ad AB parallela; & huic protractæ MY, NY occurrant in R, S; erit NS = MR. Nam XP. SN :: KB. YN :: IB. YM :: XP. RM. cum itaque ſit XP. SN :: XP. RM; erit SN = RM.

Fig. 41.

XIII. 2. In ſecundo caſu; ſit cujuſvis incidentis AN refractus KNα; & fiat YBq. KBq :: Rq. Rq — Iq; & connectatur YN; erit ABq. YNq :: Rq — Iq. Iq.

Nam quia KBq = KNq — BNq = KNq — YNq + YBq; erit (hypotheſin perſequendo) YBq. KNq + YBq — YNq :: Rq. Rq — Iq :: ANq. ANq — KNq. & per rationis converſionem YBq. YNq — KNq :: ANq. KNq. (eſt autem YBq = YNq — BNq = YNq — ANq + ABq) ergò YNq — ANq + ABq. YNq — KNq :: ANq. KNq (hoc eſt, antecedentes & conſequentes adjungendo) :: YNq + ABq. YNq. quare dividendo ANq — KNq. KNq :: ABq. YNq hoc eſt Rq — Iq. Iq :: ABq. YNq: Q. E. D.

Fig. 42.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rurſus, ſi duo refracti Mα, Nα ſecent axem punctis I, K; ipſos autem ſe decuſſent puncto X; & fiat YP. XP :: R. √Rq — Iq. & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS = MR.

Nam SB. KB :: YP. XP :: R. √Rq — Iq. quare AB. SN :: √Rq — Iq. I. item RB. IB :: YP. XP :: R. √Rq — Iq. quare AB. RM :: √Rq — Iq. I. ergò AB. SN :: AB. RM. quare SN = RM.

2. Hinc SB. RB :: KB. IB.

XV. Porro, notandum eſt quò radii ab A manantes axi viciniores ſunt eò refractos ipſorum ſpiſſiùs incedere; ſeu minora fore concurſuum interſtitia; ut nempe ſi in refringente EF ſumantur æqualia intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti Mα, Nα, Oα cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

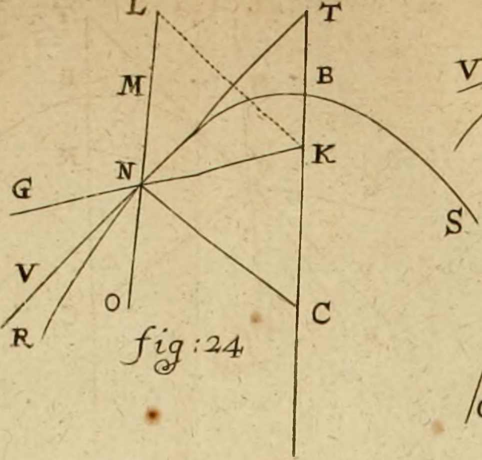

L
T
M
B
K
G
N
V
O
R
C
S

fig: 24

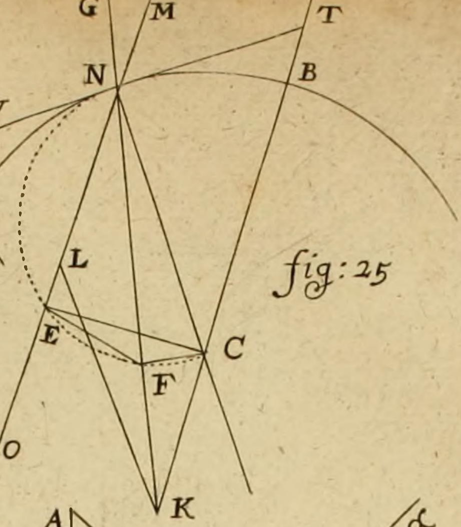

G
M
T
N
B
V
L
E
F
C
O
K

fig: 25

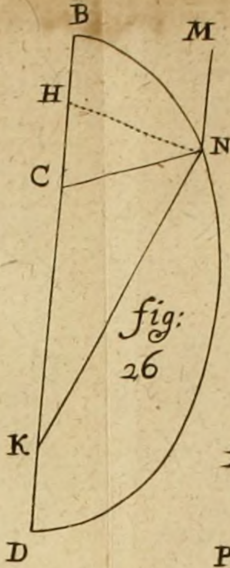


fig: 26

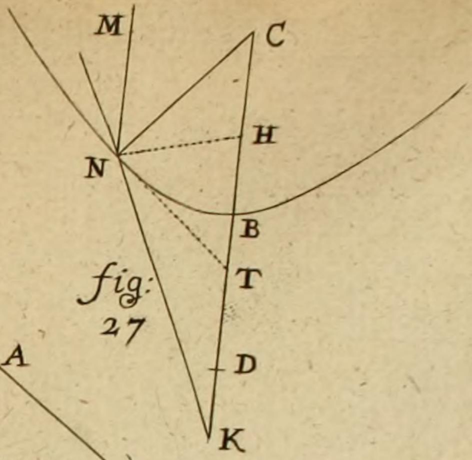
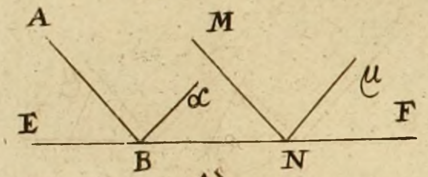


fig: 27

fig: 28



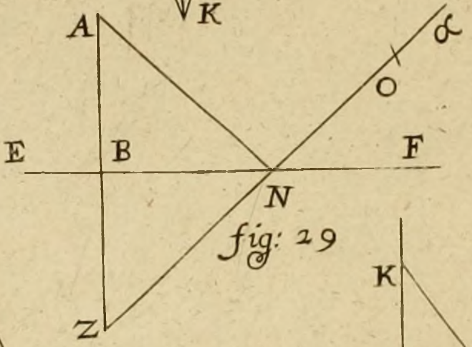


fig: 29

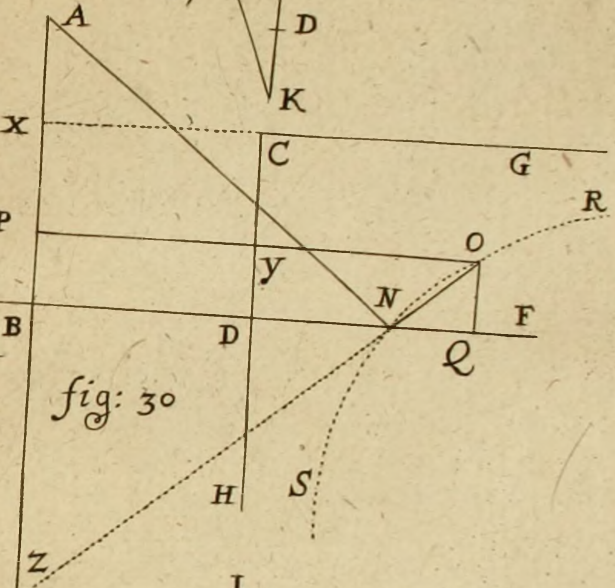

A
X
C
G
R
P
O
y
E
N
F
B
D
Q
H
S
Z

fig: 30

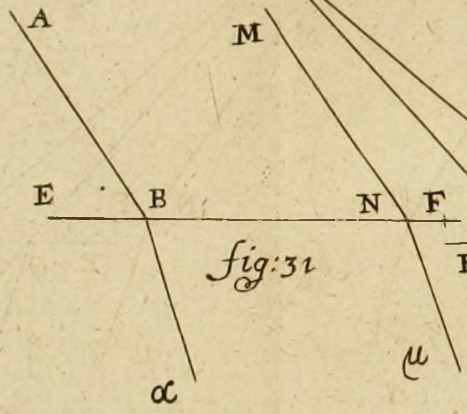


fig: 31

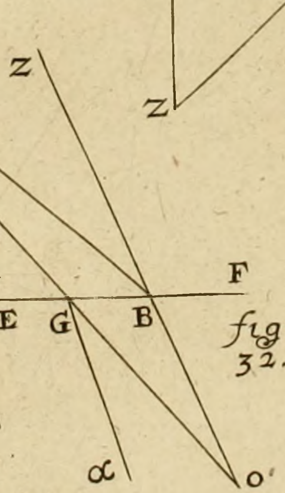


fig: 32.

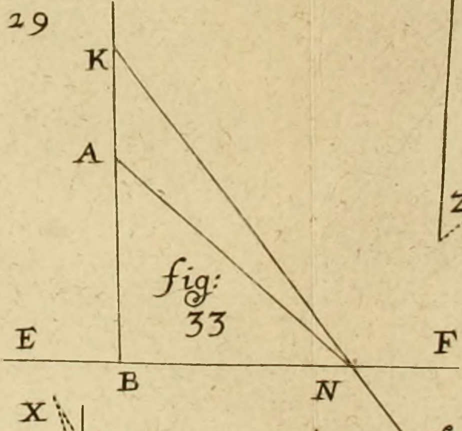


fig: 33

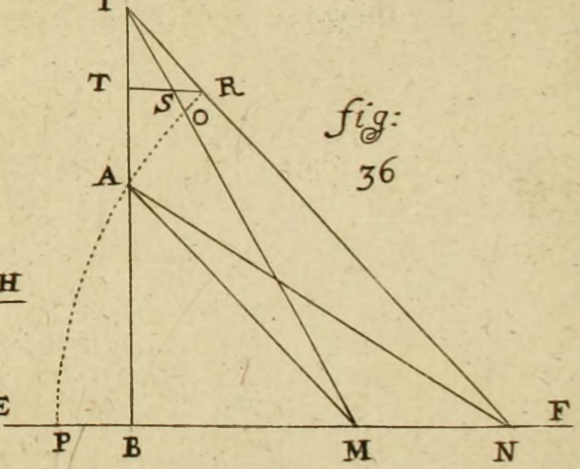

I
T
R
S
O
A
E
F
P
B
M
N

fig: 36

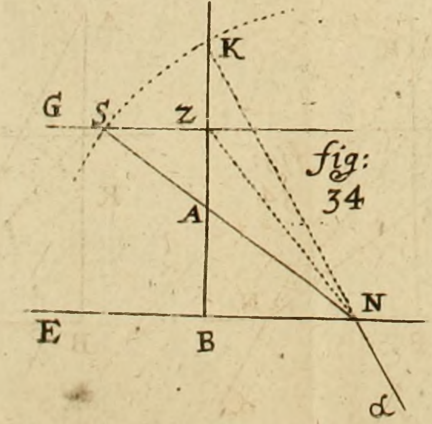


fig: 34

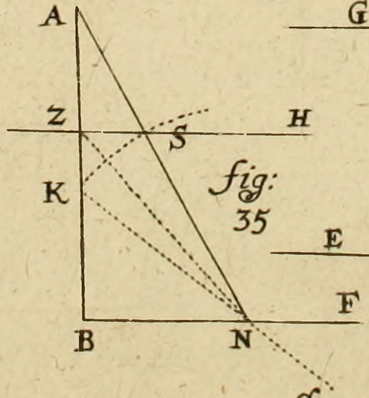


fig: 35

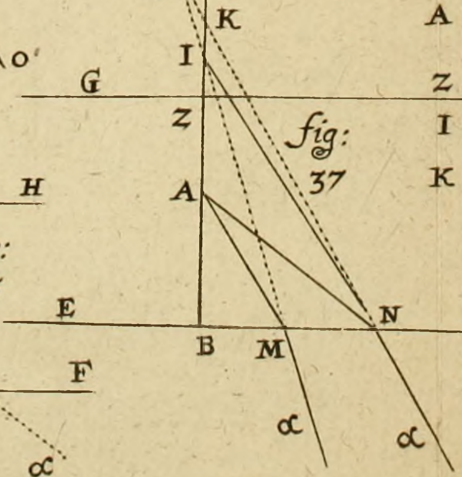

X
K
I
G
Z
A
E
N
B
M
α
α

fig: 37

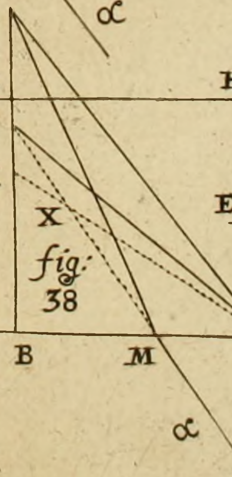

A
Z
H
I
K
X
F
B
M
N
α
α

fig: 38

Opt pag 34

tervallum IK minus ipſo KL; ſeu generalius efferendo, libere ſumptis ipſis MN, NO; erit IK.KL ⊐ MN.NO. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate conſtabit.

Fig. 43.

XVI. In primo caſu; ſit (ut antehac) ZB.AB::I.R; ſuperque diametro ZB conſtituatur ſemicirculus; cui à puncto B adaptetur BD = BA; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y; tum ad ſemiaxes BZ, BY (centro nempe B, vertice Z) deſcribatur Hyperbole HZG; in hac autem ſumpto quolibet puncto S ducantur SN ad AB, & SK ad EF parallelæ. Denique ducantur AN, KNα; erit KMα incidentis AN refractus.

Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura eſt KBq — ZBq.BNq :: BZq.BYq::ZDq.BDq (hoc eſt) :: ZBq — ABq.ABq. quare componendo KBq — ZBq + BNq.BNq:: ZBq. ABq hoc eſt KNq — ZBq.BNq :: ZBq.ABq. permutandóque KNq — ZBq.ZBq :: BNq.ABq rurſuſque componendo KNq. ZBq::ANq.ABq. denuóque permutando KNq.ANq :: ZBq.ABq::Iq Rq. quare KN.AN :: I.R. ergo KN ipſius AN refractus erit; Q.E.D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concurſus (puta I, K, L) à ſe diſtant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, BZ, MR, NS, OT; vel ipſarum O, ZI, ZK, ZL. Hæ verò (ceu paſſim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujuſmodi curvas oſtenſum eſt) in majori ratione creſcunt, quam ipſæ BM, BN, BO; nempe ZL.ZK ⊏ LT.KS. & ZK.ZI ⊏ KS.IR quare ſatìs liquet propoſitum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ ſunt; ut bene multorum perpendiculari AB adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur; utcunque circa ipſum præcipuè conſtipantur.

XVIII. Haud abſimiliter, in ſecundo caſu, ſuper ipſa AB deſcribatur ſemicirculus; & huic accommodetur BD = BZ; & connexa protractáque AD refringenti occurrat ad Y; tum centro B ſemiaxibus BZ, BY deſcribatur ellipſis HZG; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur SN ad ZB, & SK ad EF parallela; connectantur denique rectæ AN, KN; erit KN incidentis AN refractus. Etenim ex ellipſis natura eſt KSq.ZBq — SNq :: BYq.BZq :: BYq.BDq :: BAq.ADq :: BAq.BAq — BZq. & per con-

Fig. 45.

verſam rationem KSq . KSq — Z B q + S N q : : B A q . B Z q . hoc eſt KSq . KNq — Z B q : : B A q . Z B q . quare permutando erit K S q . B Aq : : K N q — Z B q . Z B q . & compoſitè K S q + B A q . B A q : : K N q Z B q . hoc eſt A N q . B Aq : : K N q . Z B q . quare rurſus permutando eſt A N q . K N q : : B A q . Z B q : : R q . J q . itaque A N . K N : : R . I . unde patet K N ipſius A N refractum fore : Q . E . D.

XIX. Exhinc, ut in priore caſu, patet quòd diſtantiæ (Z I, I K, K L) concurſuum æquantur differentiis ipſarum Z B, K M, S N, T O ordinatarum ad ellipſim. Et quod Z I, Z K ⊐ I R K S . &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipſis Z admodum exiguæ ſunt, adeóque propinquiorum axi radiorum refracti circa Z denſè congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX. Ex his tandem univerſis colligitur quòd puncti radiantis A imago (reſpectu ſcilicet oculi centrum O habentis uſpiam in axe A B conſtitutum) circa punctum Z conſiſtet. Sit enim D δ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano E A F O) & per hujus extrema tranſeant radiorum A M, A μ refracti I M D, I μ δ ; ſanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipſius A N, vel A ν) refractus oculum ingredi poterit ; quin univerſi tales aliorſum digredientur, adeóque nec illi quicquam adviſum attinebunt ; eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cùm viſus a ſolis afficiatur radiis intra ſpatium Z I axem interſecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra ſpatium Z I neceſſariò verſabitur imago ; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectius incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent ; cùm & ii (uti mox oſtendimus) ſpiſſiores ſint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem facilius ab oculo rurſus in idem punctum recolligantur (id quod poſthac aliquatenus oſtendemus ; & interim ex eo fit veriſimile, quòd res per exiguum foramen ſpectatæ, radiis ſcilicet obliquioribus excluſis, longè diſtinctius, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita ſe habent, iis perpenſis omninò rationi conſentaneum eſt objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z, hoc eſt ejus imaginem inibi conſiſtere Addo, quod ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi diſtantiam à refringente ; totum ſpacium Z I perquam anguſtum erit, & inſtar puncti merebitur exiſtimari : quæ cuncta propoſitum abunde videntur confirmare. Fig 46.

XXI. Accedit tamen ei penitiùs aſtruendo etiam experientia: quâ nempe compertum habetur; quod objectum (velut A) in aquâ ſitum, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ita diſtans videtur (puta ad Z) ut ſit perpetuò A Z quadrans ipſius A B, id quod ratiociniis præcedentibus exquiſitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* ſe habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta conſtructionem præmiſſam ipſius Z B ad A B ratio ſubſeſquitertia; ſeu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat cauſæ cur hoc fretus experimento Præclariſſimus vir receptam de refractione ſententiam impugnaret, & exploderet; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expoſiti Phænomeni cauſam adeò perſpicuam, adeò neceſſariam ſuggerenti. quinimo perpendicularem ipſam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è ſuperiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione ſaltem refringi, tametſi non ſitu) patebit ad illam attendenti.

Iſ. Voſſ.

XXII Habetur itaque definitus imaginis ſitus, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præſtemus oculi gratiâ extra ipſum ubicunque ſiti. Sed priùs unum eſt quod opportunè moneamus, anteà prætermiſſum; eâdem ſcilicet operâ quoad radios convergentes ſimul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorſus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente ſcilicet & puncto A deſignatum ſitum retinentibus) media concipiantur tranſpoſita. Nimirum, exempli causâ, ſi N K ſit refractus radii B N verſus A tendentis è raro in denſum; erit itidem N H ipſi K N in directum poſitus radii A N B, è raro in denſum (quæ nempe prioribus homogenea ſint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus oſtenſa ſunt, ea convergentibus, adhibito juſto moderamine, pariter adaptari poſſunt; in horum locum divergentes reſpectivè congruos ſubrogando. Quare nedum in hoc caſu, ſed in omnibus qui ſequentur, de radiis ſolummodo divergentibus inſtituemus ſermonem; eò ſubintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ ſanè compendio deſerviens obſervatio, generalibus iſtis ſupra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc ſolam quæ præ manibus, aſt ad omnes æquè, quaſlibet ad ſuperficies, radiorum inflectiones ſe extendit.

Fig. 47.

XXIII. Adſimilem & indè conſequentem (cùm paralleli à puncto

proveniant

provcniant infinitè diſſito) circa radios parallelos obſervatiunculam, compendio ſervientem, etiam hîc tempeſtivum fuerit adjungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad poſitionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipſorum concavis partibus incidentium; modò tranſpoſita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes à concavis diſtinguere; ſeu exinde caſus multiplicare. Res è poſthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum; & quam propoſuimus inſtituendam proximè diſquiſitionem ſequenti reſervamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti ſumus, ut radiantis (à ſenſibiliter finita diſtantia) puncti locum apparentem inveſtigemus, illum nempe qui reſultat, è peracta ad planam ſuperficiem refractione; nec non reſpectu viſus extra radiationis axem conſtituti. Quorſum imprimis ſpectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille verſatur; tum ut ſingulare deſignemus in illa recta punctum, circa quod exquiſitè conſiſtit. Utriuſque quæſiti gratiâ conficiendum, (imò penitius excutiendum) venit hujuſmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in poſitione datam rectam E F radiante, deſignandus eſt incidens, qui per alterum tranſeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B exiſtat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ita facilè conficietur. In primo caſu (quando ſcilicet $I \sqsubset R$) fiat $AB . YB :: \sqrt{Iq - Rq} . I$. itemque fiat $KB . T :: \sqrt{Iq - Rq} . R$; tum centro Y intervallo T deſcriptus circulus ipſam E F ſecet in N; connectantunrque A N, K N; erit K N α ipſius A N refractus.

Itidem in ſecundo caſu (cùm $I \sqsupset R$) fiat $KB . YB :: \sqrt{Rq . - Iq} . R$. $AB . T :: \sqrt{Rq - Iq} . I$. centroque Y intervallo T deſcribatur circulus ipſi E F occurrens in N; eritque rurſus K N α ipſius

A N refractus. Hæc autem è ſupra poſitis Theorematis abunde conſtant. 10 & 13 Lect. 4.

IV. Verum extra caſum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema ſolidum eſt, pluresque duabus ſolutiones admittit; id quod facilè perſpicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo caſu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in ſecundo) quo poſito liquet è præcedentibus obtingere poſſe nonnunquam, ut duorum Fig. 50. ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X tranſire quod cùm ſubinde, dico, contingere poſſit, indè certò conſequetur *Problema* ſolidum eſſe.

V. Pro cujus ſolutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præſertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ ſibimet appropriatam habeat, cujus deſcriptione quàm expeditè conſtruatur; & quidem ità, ut ſimul indolem ſuam prodat; poſſibilitatem, inquam, & impoſſibilitatem ſuam; determinationes, & limitationes neceſſarias; caſuum & ſolutionum varietatem apertè monſtret, & velut ob oculos repreſentet. In cujus qualis qualis obſervationis ſpecimen (alia quædam poſtmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujuſce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè deſcribendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; Fig. 51. eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S . A R :: I . R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus ſtantibus per A quotcunque tranſeant rectæ ſecantes ipſam S U punctis H; & centro X, intervallis ipſas A H exæquantibus, deſcribantur circuli ſecantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ lineæ cum ipſis H A conveniant in N. Per ejuſmodi quæcunque puncta tranſibit propoſito noſtro deſerviens linea (A N N) quam ſuſcepimus deſcribendam; cujuſce nimirum cum refringente E F interſectiones ipſiſſima ſunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; ſubinde tantùm una, cùm E F ſic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras ſaltem una erit; quæ ſatis attendenti manifeſta futura ſubnoto tantùm & levi pede prætereo ; quoniam aliunde mox apparitura) ſit, Fig. 51. inquam, ejuſmodi quælibet interſectio N ; dico fore X N, ipſius A N refractum. Etenim eſt I . R : : A H . A T . hoc eſt (quoniam A H, K X ſunt ex conſtructione pares) I . R : : K X . A T : : N K . N A . unde manifeſtum, è præmonſtratis, eſt propoſitum.

VII. Veruntamen hujuſmodi conſtructiones *Geometrarum* uſus aut non libenter admittit, aut alias ſaltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas ; itaque conſuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus ; huc utique faciens ſequens *Problema Lemmaticum* præmittentes : Dato angulo recto X P F ; punctóque quovis Y ; per hoc rectam duce e dati anguli cruribus occurrentem, ſic ut ab iis intercepta Fig. 52. ſit æqualis datæ rectæ T. || Expeditiſſimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y deſcriptæ ; ſed enim quoniam & iſte modus haud ita Geometricus cenſetur ; adhuc iiſdem Geometris obſequentes ita propoſitum exequemur. Ducatur Y B ad P F perpendicularis ; & *Aſymptotis* P X, P B ducatur *Hyperbola* per Y tranſiens (ſi quidem punctum Y exiſtat extra angulum datum, aut iſtius oppoſita (ſc. punctum Y ſit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante deſcriptus circulus *Hyperbolam* inteerſecet in K ; & à K demittatur K L ad B P perpendicularis ; accipiatur autem B N = P L ; & per N Y trajiciatur recta N G . dico factum ; vel eſſe N G parem datæ T . || Nam (ductâ Y H ad P B parallelâ) ex *Hyperbolæ* proprietate eſt P L × L K = P B × B Y . adeóque cum ſit ex conſtructione B N = P L ; erit B N × L K : : P B × B Y . adeóque B N . B Y : : P B . L K . eſt autem B N . B Y : : D Y . D G . ergo eſt P B . L K : : D Y . D G . quare cum ſit P B = D Y . erit L K = D G . adeóque (pares L H, D P addendo, vel ſubtrahendo) eſt K H = G P . quinetiam eſt Y H = L B = P N (communem nempe P B, vel L N addendo) Ergò patet fore Y K (vel T) æqualem ipſi G N : Q. E. F.

VIII. Notandum eſt autem in caſu, quando punctum Y intra datum angulum X P F exiſtit, quod circulus ille centro Y deſcriptus ſubinde deſignatam hyperbolem binis punctis ſecabit (quod enim pluribus haud quoquam ſecabit univerſim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas oſtendimus) quo caſu patet duas obvenire propoſiti ſolutiones, aliquando rurſus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget ; & tum una tantùm per Y duci poterit recta, datam T adæquans ; illa ſcilicet omnium quæ per Y dato angulo interſeri poſſunt minima. Quod ſi circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorſus ἀδιόριστον erit.

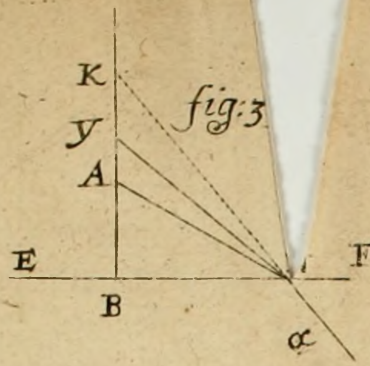


fig:3

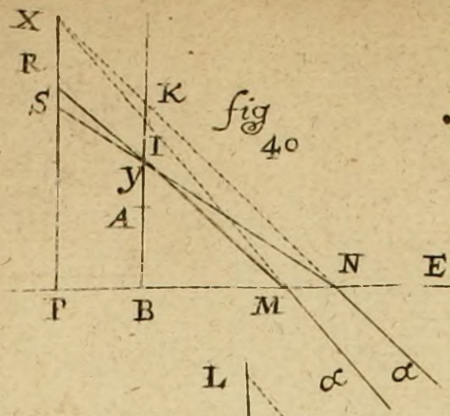

X
R
S
K
I
y
A
N
P
B
M
α
α

fig 40

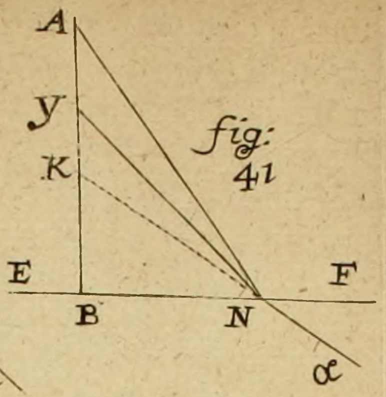


fig: 41

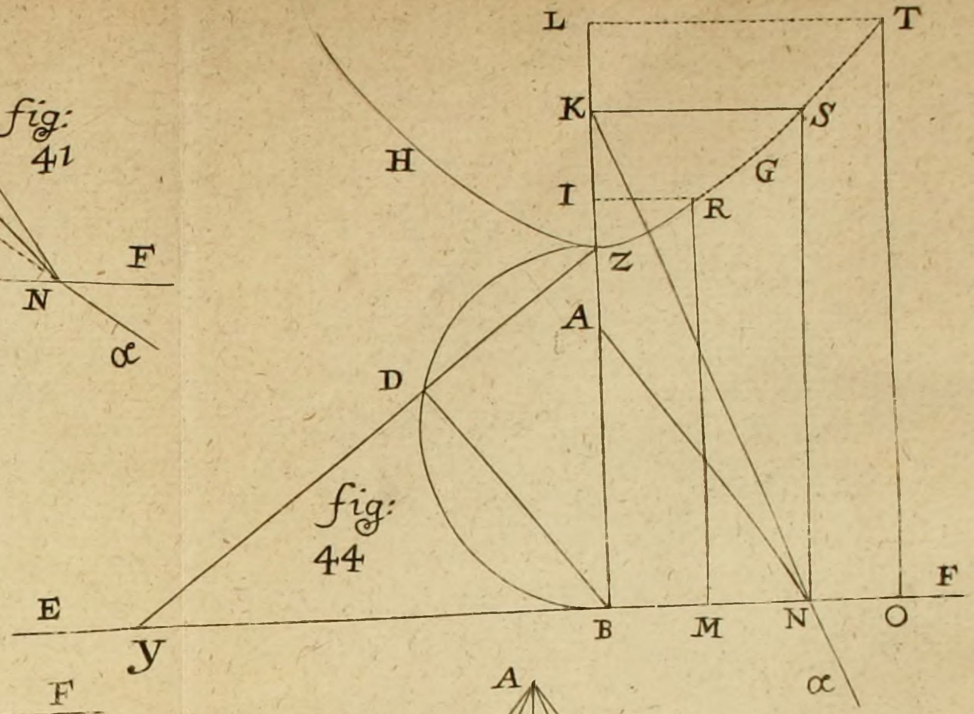

L
T
K
S
H
G
I
R
Z
A
D
E
y
B
M
N
O
F
α

fig: 44

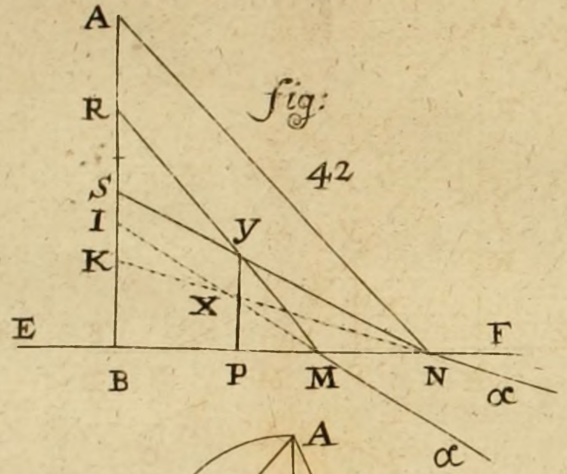

A
R
S
I
y
K
X
E
B
P
M
N
F
α
α

fig: 42

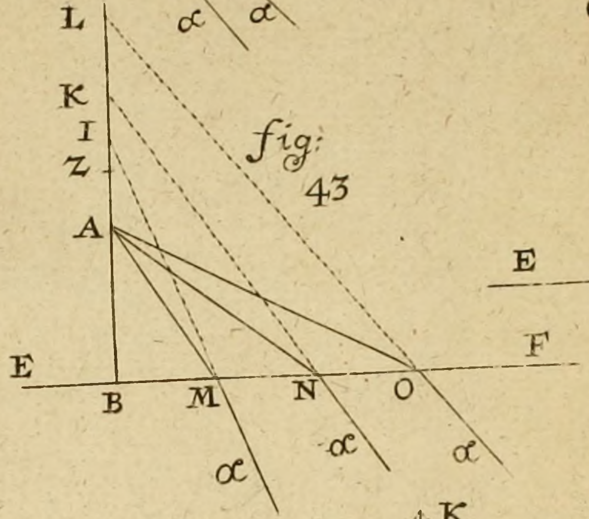

L
K
I
Z
A
E
B
M
N
O
F
α
α
α

fig: 43

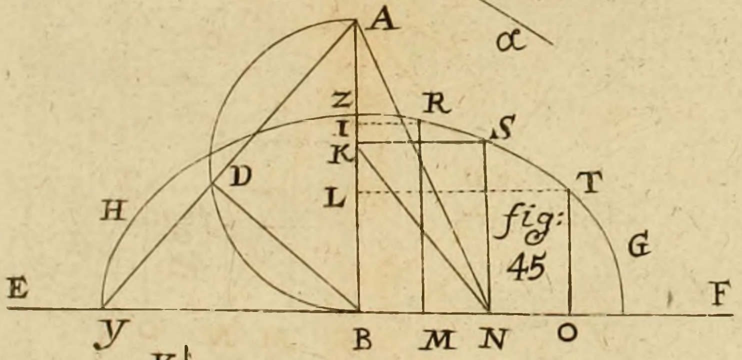

A
Z
R
I
S
K
D
H
L
T
G
E
y
B
M
N
O
F

fig: 45

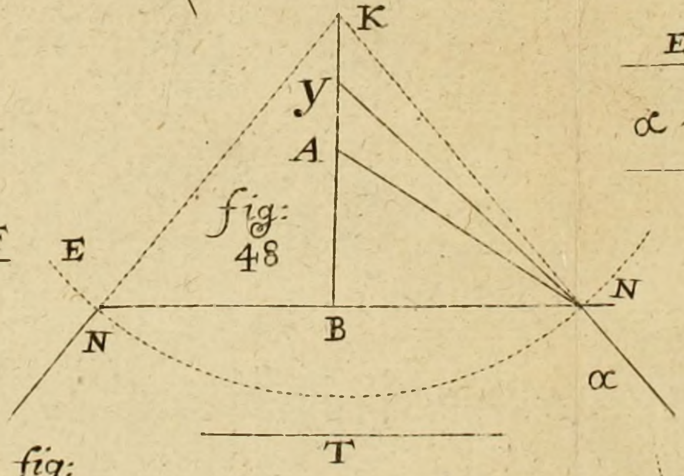


fig: 48

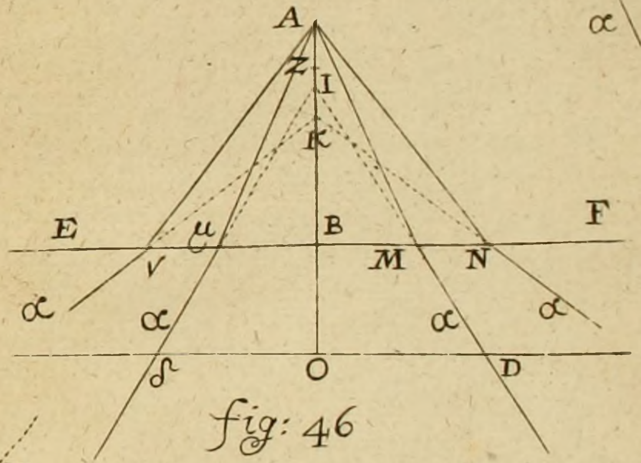

A
Z
I
K
E
u
B
F
V
M
N
α
α
α
α
δ
O
D

fig: 46

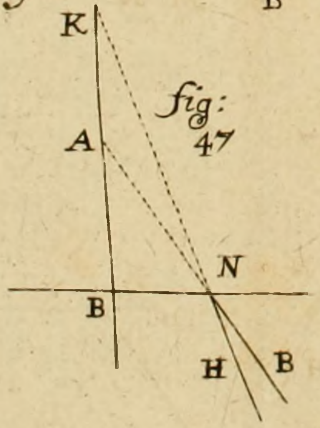


fig: 47

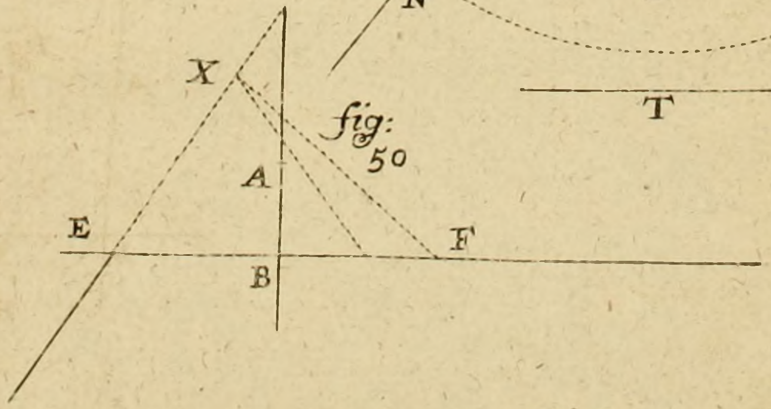


fig: 50

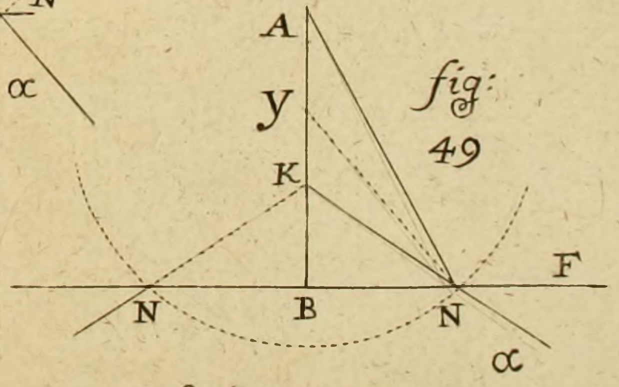


fig: 49

Opt pag 40

4

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum exiſtat, evidens eſt tantùm uno modo problemati ſatisfactum iri; quódque per alteram interſectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillùm attendenti manifeſtè conſtabunt; nihil ut ſit opus hic plura verba conſumere. verùm ut in horum caſuum primo conſtet (id quod pro ſequentibus ex uſu erit cognoſcere) quando dictus circulus *hyperbolem* contingit; ſeu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejuſdem interſeri poſſit, hoc adnectemus *Theorema*.

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF exiſtente demittantur ad ejuſdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ ſint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G tranſibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF ſubtendere poſſunt. Fig. 54.

Quòd NYG ſit una recta patet, quoniam eſt YB. BN :: GD. DY (ex conſtructione nimirum) porrò per Y tranſeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR ſimilia fore; quódque propterea eſt MN. MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ∺) eſt BN. YD :: DGq. YDq. hoc eſt YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergò eſt MN. MR :: MN. GS. adeóque MR = GS. itaque major eſt GS ipſâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM. GH :: LZ. GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, eſt LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. aſt ob angulum rectum GNH eſt GH ⊏ GN. quare magìs eſt LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major oſtendetur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam ſi GN ſit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè conſequetur fore YB, BN, GD, YD ∺. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac indè YBq × DY = BNcub; vel $DY = \frac{BN\,cub}{YBq}$. itáque DY eſt quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari poteſt autem, quòd minimæ GN propiores remotioribus

tioribus minores ſunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interſeri poſſunt, ad ejus utramque partem ſingula. nimirum hæc è ſuperiori conſtructione luculentè patent; pauxillum expende Sodes; & perſpicies; operámque meam non deſiderabis.

XII. His præſtratis ad *Principale conſtruendum Problema* revertimur; & reliqua detexenda. ſcilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius eſt deſignandus, cujus refractus per datum punctum X tranſibit. || hoc ità conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares A B, X P. tum in primo caſu fiat A B. Y B :: √ I q — R q. I. neque non fiat X P. T :: √ I q — R q. R. & per punctum Y tranſadigatur recta N G ſubtendens angulum A P F, & ipſam T exæquans; & connectantur A N, X N. dico factum; ſeu rectam X V incidentis A N refractum eſſe. || Etenim eſt X P. K B :: N P. N B :: N G. N Y. permutandóque X P. N G :: K B. N Y. hoc eſt X P. N G (vel √ I q — R q. R) :: K B. Y N. itaque per theorema præmiſſum liquet K N ipſius A N refractum eſſe: Q. E F. Fig. 55, 56.

Haud abſimiliter in ſecundo caſu; fiat X P. Y P :: √ R q — I q. R; itémque A B. T :: √ R q — I q. I; angulóque A B F per Y tranſiens, ipſámque T adæquans inſeratur recta N G; connectantúrque A N, X N; factum erit. || Nam ipſam X P protractam ſecet A N in S. èſtque S P. Y N :: A B. G N :: A B. T :: √ R q — I q. I. unde conſequitur è præmonſtratis fore X N ipſius S N refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc, & præmiſſa reſpiciendo ſatìs diluceſcit non ultra duos ad unas perpendicularis A B partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut ſupra declaratum) per puntum Y (quod univerſis hujuſmodi conſtructionibus commune, vel invariatum perperſiſtit; in primo caſu quoad omnes ab A incidentes; in ſecundo qnoad omnes per X tranſeuntes refractos) plures duabus ſibi pares duabus ſibi pares rectæ angulo recto X P F, vel A B F interſeri nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipſum X tranſibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago verſatur; iſte nimirum refractus qui per oculi centrum tranſit, modo jam expoſito ducendus; ipſum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè conſiſtit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in caſu primo, punctum Y conditione præditum jam aliquoties inſinuatâ; ſcilicet ut ſit AB.YB::$\sqrt{Iq - Rq}$.I; & deſignetur quilibet refractus KN; tum continuetur ratio YB ad BN; ut ſit ad has proportione quarta BP; & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela; refracto KN occurrens in Z; dico nullum alium refractum per Z tranſire. Nam ſi fieri poteſt tranſeat alius ZR; & per Y traducantur rectæ NYG, RYS; è præmonſtratis apparet quod ſit RS* = NG. item è prædictis manifeſtum eſt quòd RS* ⊏ NG. quæ repugnant. Fig. 57, 58.

* 12. *Lect.* 4.
* 9 *hujus Lect.*

XVI. Non diſpari ratione, quoad caſum ſecundum, deſignetur quilibet refractus KN; & fiat KB.GB::$\sqrt{Rq - Iq}$.R; tum adnexâ GN, ad ipſas NG, GB ſumatur tertia proportionalis V; & fiat NG.V::BN.NP; & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decuſſans in Z; dico nullum alium refractum per ipſum Z meare. Nam, ſi neges, tranſeat alius ZR; & per Y trajiciatur RYS; & quoniam ZP.YP::KB.GB::$\sqrt{Rq - Iq}$.R. ex *antedictis apparet fore RS = NG. quinetiam ob NGq.GBq::NG.V::BN.NP. erit dividendo NBq.GBq::BP.NP. hoc eſt NPq.PYq::BP.NP; inde facile deducitur eſſe BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN; conſequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adverſatur oſtenſis. itaque potiùs per Z nullus alius tranſit refractus: Q.E.D.

* 14. *Lect.* 4.

XVI. Prætereà, ſi refractum NKZ interſecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc eſt ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) interſectio X ſolitario puncto Z citerior erit (ſeu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ; ipſam NG ſecans in γ; & (in primo caſu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò MH = Nγ. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interſeri poſſunt inter puncta M, N cadet (utì nuper admonitum, & adſtructum). puta ad φ. ergò quum ſit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad Bφ, erit PB ⊏ QB; adeóque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q.E.D. Fig. 59, 60.

In ſecundo caſu, per γ trajiciatur recta MγH. ergò cùm ſit QX.Qγ::PZ.PY::$\sqrt{Rq - Iq}$.R. erit HM = GN. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet; puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad Qφ; & eſt γQ.Qφ ⊏ (γQ.QN.)::YP.PN. &

ſimplicibus triplicatas ſubſtituendo rationes, eſt γQ . QB ⊏ YP . PB. & his æquales rationes adjungendo eſt QN . γQ + γQ . QB ⊏ PN . YP + YP . PB; hoc eſt QN . QB ⊏ PN . PB. componendóque BN . QB ⊏ BN . PB. ergo QB ⊐ PB. unde rurſus liquet rectam XQ ipſis AB; ZP interjacere: Q. E. D.

XVII. Conſimili prorſus argumentatione conſtabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipſam KN interſecare.

XVIII. Quinimò rurſus exertiùs apparet non niſi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipſo KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præſertim illos, qui ad partes F (obliquius) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, ſibi pares NS, ST; & ſit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipſam NKZ ſecent in Z, X, & V. patet (è mox oſtenſis) omnium ſpatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX; nec non omnes ipſi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR ſe habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel ſunt in ipſarum BN, BS, BT *ratione triplicata*: nam BP . YB :: BN cub . BY cub. & YB . BQ :: YB cub . BS cub. adeóque ex æquo BP . BQ :: BN cub . BS cub. & conſimili ratione BP . BR :: BN cub . BT cub.) undè faciiè monſtrabitur eſſe PQ multo minorem quàm QR; xel ZX quàm XV (verbis parco multis in re ſatis manifeſta). quare dicti refracti circa punctum Z ſpiſſiùs ipſum NK decuſſabunt.

XX. Ex his demùm conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK uſpiam conſtituto, puncti A imaginem ad ipſum conditione præditum toties inſinuatâ punctum Z conſiſtere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter*; *axi Optico* KN perpendicularis; & per ejus extrema C, D tranſeant refracti IM, LR ipſi KN occurrentes punctis X, V. ex oſtenſis patet omnium intra ſpatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum interſecare; neque non omnes ad ſpatium N R pertinentes intra Z V eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (ſeu nullum citra X, vel ultra V cum ipſo K N concurrentem) oculum ingredi poſſe. quare ſaltem imago conſiſtet intra terminos V X; ſiquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad viſionem conſerent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. cæterum quoniam ab V X procedentium (apparenter, inquam, procedentium) reciſſimi, vel axi propriores velut ab ipſo Z procedere videntur (ſeu à loco qui circa ipſum) ipsíque proinde validiùs afficiunt oculum, & ab eo faciliùs adunari, recolligíque poſſunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi ſaltem qui ad partes N R,) quia denique propter anguſtiam pupillæ ſpatium V X haud ita magnum exiſtit; cùm, inquam, hæc ita ſe habeant, omnino rationi conſentaneum eſt, dictam imaginem circa punctum Z verſari; nec alias arbitror excogitari poſſe veriſimiles cauſas, quæ ſitum ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & poſt eum pleraque cohors *Opticorum* ipſam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem A B decuſſat, conſtituit; verùm haud ullam rei natura cauſam ſuggerit, cur inibi ſtatuatur. unicus enim (niſi ſaltem pupilla perpendicularem ipſam A B comprehendat, oculuſque valdè ſit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo viſui minimè ſuffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra K X ipſi K adjacentium eſt ratio; nullus ſiquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque ſubeſt cauſæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens N H æqualem ipſi N A puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulſus quia taliter in reflectione ſe rem habere perſpexit; cui ſimilis cauſa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quanquam ipſos in diverſum euntes) horúmque ſequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout uſu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indiſtinctéque perceptas mortalibus imponere; ſed utcunque quod dixi magìs iſta ſententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo caſu refractorum concurſus fit infra angulum ABF; nullus extra illum in ſecundo; proindéque fortiùs hanc quæ objecimus, quàm priorem *Alhazeni* percellunt ſententiam. addo quòd ſimul utraque, ſed præſertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicíque ratiocinio; pariter enim ſe res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quod manifeſtè, longéque ſecus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum eſt. quin hanc abunde ſubvertit ac peſſum dat quod ſupra propoſuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipſo perpendiculari

Fig. 62.

D. Hobbius.

lari A B conſtituto, non in ſuo loco (quod juxta dictam ſententiam oportuit) aſt pro mediorum diverſitate, (perquam ſenſibili intervallo) citeriùs adſpectatur, aut ulterius. Sed effatum hoc noſtrum (eíque quoad reliquos in Catoptricis, Dioptricíſque caſus ſimiles conſona) tametſi novitium, & nullâ quod ſciam hactenus auctoritate fultum, cùm forſan expoſitum dilucidiùs, tum penitiſſimè dabimus confirmatum, ſi quando nos de imaginum natura, locóque ſpeciatim evenerit diſſertare. Mihi ſaltem videtur hæc Scientia quoad hanc partem ſuam, certè palmariam (utì reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodùm vitioſa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquouſque ſuppleamus eam, ac ſanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interſeremus. Aqueæ Superficiei R S (ſtagnanti, & immotæ deſuper immineat objectum H G; ejus autem punctum G radat perpendiculum E F (filum puta candidum, aut ſtylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipſâ perpendiculari G B velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili diſtantiâ) citra lineam B γ aſpicitur (velut ad φ) id quod ex ſententia noſtra factum oportuit; & *Alhazeni*, ſequaciúmque doctrinam liquidò deſtruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræſentatur in aquæ fundo conſpicua) lineam deſignandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, aſt aliam alii) Chimæram inani ſunt operâ proſequuti; de quâ *Carteſius* ipſe percontanti *Merſenno* ſic Tom. II, Epiſt. 73. reſpondit: “Non poteſt facilè determinari qualem figuram linea viſa in fundo aquæ ſit habitura; neque enim certus eſt aliquis imaginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum ſibi vulgò perſuaſerunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm ſpeciale quodvis objectum (per ejuſdem generis & eodem modo terminatum medium aſpectabile) ſimilem conſtanter exhibeat ſpeciem ſui, ſimili ſitu diſpoſitam, ſimili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum ſortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus eſt caſum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujuſmodi planam ad ſuperficiem refractione ſubnaſcentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) cauſa verè, ni fallor, hinc & promptè poſſit aſſignari. verùm hæc circa planas ſuperficies dicta ſufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

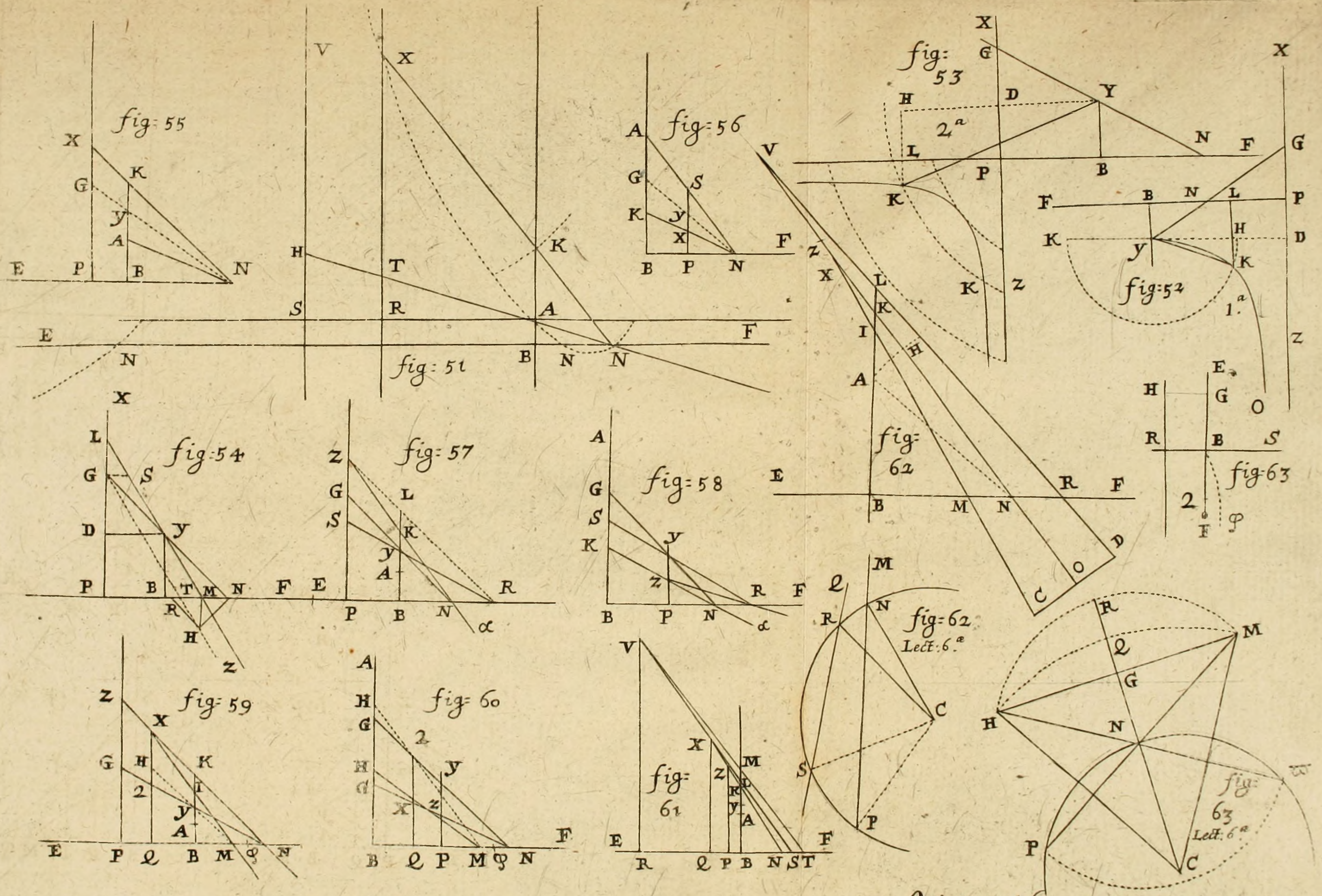


fig: 55
X G K y A E P B N
fig: 51
V X H T K S R A E F N B N N
fig: 56
A G S K y X B P N F
fig: 53
X G H D Y 2.a L P B N F K K Z
V Z X L K I H A
fig: 62
E B M N R F D O C
X G F B N L P K y H D K K fig: 52 1.a Z O
fig: 54
X L G S D y P B T M N F R H Z
fig: 57
Z G L S K y A E P B N R α
fig: 58
A G S y K Z B P N R F α
E H G R B S 2 F φ
fig: 63
fig: 59
Z X G H K 2 I y A E P Q B M φ N
fig: 60
A H G 2 y H G X Z B Q P M φ N F
fig: 61
V X Z M K L y A E R Q P B N S T F
fig: 62 Lect: 6.a
Q M R N C S P
fig: 63 Lect: 6.a
R M Q G H N ϖ P C

Opt pag 46

LECT. VI.

I. ABſolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam ſuperficiem inflexis (obſervatu quæ videbantur non indigna, cúmque principiis noſtris cohærentia; quæ denuò viam ſternebant, aut methodum aperiebant ſequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excuſſà re, tam exilem illam & abſtractam deprehendo, ſatius ut exiſtimem actutùm ad particularia deſcendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratiſſimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è veſtigio. pro qua tamen, ob cauſas pridem aſſignatas, circulos ſubrogabo per oculi Sphæræque centra, pérque ſingula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò, *Dioptrica* poſtmodum exequemur. Ad illa.

II. Præſternemus autem λημμάτιον unum vel alterum; hoc imprimìs: Incidentium circulo radiorum obliquior eſt, qui magis à centro diſtat; vel qui minorem arcum (ſubſemicircularem) ſubtendit. ſcilicet obliquiùs incidit recta QRS, quàm recta MNP. Nam à centro C ducantur CN, CP; & CR; CS. & quoniam angulus RCS angulo NCP (hypotheſi nimirum inſiſtendo) minor eſt; patet reliquos CRS, CSR reliquos CN, P, CPN (cùm junctim, tum ſingulum ſingulo) majores eſſe. Cùm itaque Semidiametri CR, CN, circumferentiæ perpendiculares ſint; omninò liquet propoſitum. Fig. 62.

III. *Dato radio MN ad circulum incidenti congruum reflexum reſignare.* Fig. 63.

Variis modis huc facilè peragitur; quorum nunc unum adhibere, tunc alium ex uſu ſit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens MN protrahatur ut circulum denuò ſecet in P.; & ſumatur arcus N ϖ = NP; erit connexa ϖ NH ipſius MNP reflexus. nam à centro C connexâ CN, manifeſtum eſt angulum

C N ϖ,

CNϖ, angulo CNP æquari . z 2. Accepto quovis in NM puncto
Fig. 63. (puta M) centro C per M deſcribatur circulus MQH; item centro N per M deſcribatur circulus MRH, qui priorem MQH ſecet in H; erit HNϖ reflexus ipſius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex conſtructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protenſâ CNR, a quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac producta ſumatur GH = GM; erit conjuncta HNϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi ſufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

IV. Nocetur ſi fuerit HNP reflexus ipſius MNP fore Nϖ = NP.

V. Diſpiciamus jam primò quid ex hujuſmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quoad ſenſum diſtantiâ radianti, ſeu parallelos projicienti radios. quorſum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in ſequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejuſmodi recta nominetur axis; hîc *Speculi*, poſtea *Diaphani*) biſecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z tranſeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protenſa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque caſu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iſte qui in illo productus erit) connexáque CN ipſam ZY interſecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipſius MN reflexus (vel reflexi productus.) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éſtque CZ.CK:: (CZ.CV::) CQ.CN. quapropter antecedentes duplicando CN.CK:: PN.CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP ſimilia ſunt; adeoque KN = KC. igitur è ſuprà generatim oſtenſis patet fore KN, ipſius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujuſmodi quotcunque reflexos quàm expeditiſſime deſignandi; quin & ipſorum erga ſe rationes ac reſpectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucescunt; corollariis nempe ſubjectis comprehenſa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB biſecans, eſſe metam infra quam nullus reflexus axem ſecat (vel perpendicularis iqſius reflexum B Z ad Z terminari). quia ſemper $Cv \sqsubset CZ$; adeóque $CK \sqsubset CZ$.

VIII. 2. Patet eſſe $KN = KC$.
3. Patet fore PN ($2CQ$), CN, CK ∺.

IX. 4. Ductâ tangente B T, productâque C N E, patet ſecantem C E diſtantiæ C K duplam eſſe; & $EN = 2KZ$.

X. 5. Manifeſtum eſt incidentis ad F (hoc eſt ad diſtantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B tranſire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra ſpacium BZ decuſſare; ſed omnes *extra* B F reflexos ultra B cum eo convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perſpicuum eſt duorum hujuſmodi quorumvis ad eaſdem axis partes incidentium (ut ipſorum M N P, Q R S) reflexos (ut G N K, H R L,) productos ſe prius decuſſare, quàm axem. Nam, ductis C R, C N, eſt $C\varrho \sqsubset Cv$, adeóque $CL \sqsubset CK$. unde neceſſariò rectæ N K, R L, ſe decuſſabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipſi convexis partibus incidentium reflexi, N G, R H, antrorſum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde ſpeculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum G X R (vel K X L) à duobus reflexis comprehenſum æquare duplum angulum N C R (hoc eſt duplum exceſſum angulorum incidentiæ). Nam ang. K X L = ang. A L R — ang. A K N = 2 ang. A C R — 2 ang. A C N = 2 ang. N C R.

XIV. Pro Sequentibus hujuſmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam A B C recta A D biſecet angulum B A C; dico fore $AB + AC \sqsubset 2AD$. Fig. 66.

In *Iſoſcele* res clara eſt; in alio proinde ſit $AC \sqsubset AB$; centróque A per B ducatur circulus B X Y ſecans ipſam. A D in X, & A C in Y. Subtenſa B X ducatur, ipſamque A C ſecet in V; fiátque V T ad A D parallela. denuò ſubtenſa X Y connectatur. Et quoniam ang. X V C major eſt angulo X Y V, vel angulo B X D, vel ipſo

BVT, patet rectam VT angulum XVC ſecare. item ob angulum XYV obtuſum, eſt $XV \sqsubset XY = BX$. ergo $BV \sqsubset 2BX$; & $VT \sqsubset 2XD$. Verùm ang. VTC (major ipſo TVB, vel ipſo DXB) eſt obtuſus; adeóque $VC \sqsubset VT$; itaque magìs $YC \sqsubset 2XD$. ergo $AB + AY + YC \sqsubset 2AX + 2XD$. hoc eſt $AB + AC \sqsubseteq 2AD$: Q. E. D.

XV. Quò paralleli radii rectiùs (vel axi propinquiùs) incidunt, eò reflexorum concurſus ad axem ſibi viciniores ſunt.

Fig. 67. Nempe ſumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit $ML \sqsubset LK$. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis v, ϱ, ξ. Eſt itaque (juxta *Lemma* præcedens) $C\xi + Cv \sqsubset 2C\varrho$; hoc eſt, $CM + CK \sqsubset 2CL$. quare $CM - CL \sqsubset CL - CK$; hoc eſt $ML \sqsubset LK$: Q. E. D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujuſmodi reflectione magìs magíſque conſtipari; maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipſius quaſi reflexus terminatur. unde potiſſima conſtat ratio, quare concavis à ſpeculis ad ſolem expoſitis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condenſatior, ínque ſpacium arctius quaſi compreſſa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

XVII. Quinetiam ex his conſectatur, longinqui puncti imaginem
Fig. 68. oculo in axe conſtituta circa punctum Z conſiſtere. Sit, inquam, BCO axis Opticus; oculíque diameter $D\delta$ (in plana nempe circuli propoſiti ſita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, $VK\delta$ (ad incidentes MNP, $\mu\nu\varpi$ pertinentes). jam abunde manifeſtum eſt imaginem conſpicuam intra KZ ſpatium verſari. Nam alterius cujuſvis hinc, vel indè cadentis reflexus (ſeu ipſius RS, vel $\varrho\sigma$) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad viſionem ipſam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui ſcilicet oculum ingredientes ſuo quiſque modo viſum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectiùs incidunt oculo, magíſque pollent idcircò; nec non iidem propterea faciliùs ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi conſonum eſt iſthic præſertim imaginem conſiſtere; ſiquidem velut ab eo plures, ac efficaciſſimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pu-

pillæ latitudinem, ipſum ſpatium K Z non ità magnum eſſe, quin inſtar *Puncti* poſſit cenſeri. Quibus expenſis luculentè conſtare videtur propoſitum.

XVIII. Subdo tantùm, ſi oculus uſquam intra ſpacium Z B ſtatuatur, viſionem indè confuſam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (ſeu rectiſſimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis noviſſimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto diſtat intervallo, quanto punctum radians ab eodem ſemovetur; ità quidem ut Sol ex hujuſmodi reflectione conſpicuus ad tantam, quantam directè ſpectatus, diſtantiam (eorum inſiſtendo ſententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim ſi Soli exponatur *Speculnm* R B ρ (concavum, aut convexum) ſic ut ei Sol quaſi perpendiculariter immineat, oculúſque prope axem B C conſtituatur uſpiam; ferè circa punctum Z, arbitrante ſenſu, luculenta Solis imago ſeſe præbebit oculo conſpiciendam; id quod juxta ratiocinium noſtrum neceſſariò debuit evenire. verùm hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuſcunque ratio veriſimilis conſtabit) ubique ſe objiciet refutandum. hìc itaque pluribus parco; pergóque verſus oculum extra radiationis axem poſitum; poſtquam unicam hanc præcedentibus adnexam obnſervationem ſubjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum viſibile clariùs atque diſtinctiùs repræſentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe ſubtenſam N V inſiſtant imparium circulorum ſegmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; conſtat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c exiſtere. Fig. 69. biſecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; híſque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; denuò radii P N axi paralleli ſit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipſam verò N b v ſit ejuſdem reflexus N k; liquidiſſimè jam patet quòd ſit N e ⊏ N E; hoc eſt quòd dupla z k major ſit duplâ Z K; adeóque ſimpla z k major ſimplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio ſtrictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de cauſa rem objectam illuſtriùs atque diſtinctius exhibet obtuenti. quod erat propoſitum oſtendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe ſitum ſuffecerit attigiſſe. Supereſt ut idem oculi gratiâ ſecùs conſtituti pertentemus. id operis ſequenti deputamus.

LECT. VII.

I. ID nunc agimus, ut ab infinito quoad ſenſum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi reſpectu præter axem ſiti, locum exquiramus. quocirca primùm ipſa recta linea determinanda venit, in qua locus iſte verſatur; tum ipſiſſimum præciſè punctum eſt deſignandum. In primi verò propoſiti gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB poſitione data; deſignandus eſt huic parallelus radius, cujus reflexus per datum tranſeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipſa CB exiſtat, facilimè peragitur negotium. nam ſi centro K, intervallo KC deſcribatur circulus, ipſi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB paralleli; prout ex antedictis abunde perſpicuum eſt.

IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipſa reflectentis circumferentia verſetur; arcûs triſectione ſtatim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipſa uno modo problemati ſatisfacit) & interceptus arcus XH ſecetur punctis N, P, ut ſint arcus XN, NP, PH æquales inter ſe; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipſi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipſius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindéque NP ipſi XH, hoc eſt ipſi BC, parallela eſt. itaque factum. Fig. 71.

V. Verùm extra caſus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀπροσδιονύσους) *Problema* magìs ſolidum eſt; in ſummo quippe gradu tale; quatuórque ſubinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi poteſt (ut alia pleraque, ſicutì pridem admonitum nobis) ſibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditiſſimè per puncta deſcribendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectatúrque recta XC; & ſuper hanc ceu diametrum deſcribatur circulus XICI. tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC ſecantes punctis I, rectámque GF punctis H; & adſumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ita ſcilicet ut puncta I rectas NH perpetuò biſecent) perque puncta quotvis ejuſmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quà certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis noſtri conſtructioni deſervit, ejúſque liquidò naturam patefacit; ſiquidem ejuſce cum dati circuli interſectiones N (illæ verò ſubinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim interſectionibus adnumero) nonnunquam Solummodo duæ; prout datus circulus magnitudine præditus eſt aliâ ac aliâ; quæ ſtrictim adnoto tantùm, animum advertenti manifeſtè conſtitura) poſſibiles quaſque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipſo X ad ejuſmodi quamvis interſectionem N recta XN; & per N tranſeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC ſecet in I, rectámque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è deſcriptæ lineæ naturâ ſeu conſtructione eſt IH = IN; angulúſque CIX, in Semicirculo, rectus eſt; erit XN = XH; vel ang. XNI = ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par eſt. quapropter anguli XNI, HNP pares ſunt. adeóque recta NX ipſius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. ſic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam ſuprà) *Geometrarum palato minùs ſapiunt hujuſmodi Problematum inuſitatæ ſolutiones*; aliter id (ſatis breviter atque perſpicuè) dabimus effectum hoc ſaltem eo faciens Lemmaticum Problema præmittentes.

Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus poſitione data diameter GF) & puncto C in ejuſce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id ſic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipſas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inſeratur recta RS par ipſi P (id autem quomodò præſtandum, edocuimus ſupra) tum per C ducatur C H L ad R S parallela; erit intercepta H L (quod requiritur) æqualis ipſi Z. Nam connectatur C G; & huic perpendicularis ducatur G T; ad C F proinde parallela. quia jam ang. G C T = C G R = F S R, liquet rectangula trigona C G T, R F S aſſimilari. adeóque fore C T C G :: S R. S F. item (ob ſimilitudinem triangulorum C G H, S F G) eſt C G. G H :: S F. F G. erit igitur ex æquo C T. G H :: S R. F G. (hoc eſt) :: F G. Z. verùm eſt C T. F G :: C H. F H :: H G. H L. permutandóque C T. H G :: F G. H L. quare F G. Z :: F G. H L. liquet igitur H L ipſi Z datæ æquari: Q. E. F.

Fig. 73, 74.

Plures eſſe caſus poſſunt; ut nempe punctum L ſit intra Semicirculum G C F (ídque poſitum inter puncta C, G, vel inter ipſa C, F) vel in altero Semicirculo G E F, ultra G F ſito reſpectu puncti C; ſed hæc una conſtructio ſimul ac demonſtratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non ſit opus.

VII. Adnotetur ſaltem quoad iſtos caſus, quòd ſicuti per punctum G (ut antea commoſtratum) aliquando quatuor rectæ duci poſſunt datam adæquantes, rectíſque F C, F V terminatæ; binæ ſcilicet inter angulum quo punctum G continetur, alteræque totidem extra ipſum; nonnunquam verò tres ſolæ; quum data recta minima continget eſſe cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo poſſunt interſeri; ſubinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità reſpectivè Problema jam expoſitum plures totidem ſolutiones accipit. Sanè quò major eſt hîc data Z, eò minor evadet intercepta R S; & viciſſim quò minor R S, eò major ipſa I Z; unde ſi fuerit R S omnium minima, quæ angulo C F V punctum G capienti inſeri poſſunt, etiam H L maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum G F, & Semicirculum G E F comprehendi poſſunt. unde *Poriſmatis* loco patet, è ſupradictis, quo pacto talis maxima duci poſſit; & hoc ipſum Problema penitus determinari. quod attendenti non obſcurum innuiſſe ſatìs videtur. jam ad principalis quæſiti reſolutionem accedimus; ità jam brevitur propoſiti.

Fig. 73, 74. VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ poſitione rectæ B C ſit parallelus.

Id ſic efficitur. Centro X per C deſcribatur circulus G L F C; item per X ducatur G F ad B C parallela; tum ex C prjoiciatur recta, cujus ſecundum Lemma mox præcedens, intercepta pars H L æquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum ſecet in N;

ductæ X N reflexus (puta N P) ipſi B C parallelus erit. Nam connexis X C, X L; quoniam C N = H L; & C X = L X; & anguli X C L, X L C pares ſunt; erit X H = X N. quapropter erit N P ad X H, vel B C parallelus: Q. E. F.

IX. Ex hac conſtructione, cum præmiſſi lemmatis ſolutione collatâ diluceſcet hujuſmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, tranſire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam ſi C N major ſit, quam ut ei par H L rectâ G F, Semicirculóque G E F intercipi poſſit; quod ad axis partes, ad quas ipſum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam ſi C N tanta ſit, ut ei par una tantùm ejuſmodi recta poſſit intercipi, quòd unicus per ipſum X reflexus iter ſuſcipiet. tales, inquam, expoſiti problematis determinationes hanc conſtructionem haud obſcurè ſequuntur; quas certè tu melius uno mentis (haud dormitantis) ictu perſpexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro. Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (ſeu rectas) ſatìs definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, reſpectu viſûs utcunque poſitione datum centrum habentis, conſiſtit. ad ejus jam præciſiorem locum inveſtigandum accingemur; in iſtarum rectâ quâpiam exiſtentem.

XI. Huc adnotetur imprimìs, quòd ſi duorum ad eaſdem axis partes incidentium parallelorum (N P, R S) reflexi ſint N ϖ, R σ; erit arcus N R, vel P S arcûs ϖ σ ſubtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X; & Connectatur recta R ϖ. & quoniam, è præmonitis, angulus N X R duplus eſt anguli arcui N R ad centrum inſiſtentis; erit idem angulus N X R anguli N ϖ R quadruplus. quapropter erit ang. N X R — ang. N ϖ R triplus anguli N ϖ R, hoc eſt angulus X R ϖ anguli N ϖ R triplus. unde quoque triplus erit arcus ϖ σ ipſius N R: Q. E. D. Fig. 76.

XII. Iiſdem ſtantibus dico fore R X (obliquioris reflexi partem incidentiæ concursûſque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi R σ. Nam, ductis ſubtenſis N R, ϖ σ; erit 1 . 3 :: arc. N R . ϖ σ . ⊐ recta N R . ϖ σ :: R X . X ϖ ⊐ R X . X σ (quia ſcilicet eſt X ϖ ⊏ X σ). igitur eſt X σ minor triplâ R X; componendóque minor erit R σ quadruplâ R X: Q. E. D.

XIII. Item, dico fore NX (rectioris itidem reflexi concurſûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius $N\varpi$. Etenim fiat ang. $HR\varpi =$ ang. $N\varpi R$; quapropter erit $HR = H\varpi$; adeóque $2\,H\varpi = HR + H\varpi \sqsubset R\varpi \sqsubset N\varpi$. item quoniam ang. $RHN = 2$ ang. $HR\varpi =$ ang. XRH; eſt $XH = XR \sqsubset XN$. quum itaque ſit $H\varpi$ major ſemiſſe totius $N\varpi$; & XH major ſemiſſe reſidui NH; liquet totam $X\varpi$ majorem eſſe triplâ XN; ſeu totam $N\varpi$ majorem eſſe quadruplâ NX: Q. E. D.

XIV. Hinc perſpicuum eſt, ſi fuerit NZ reflexi $N\varpi$ quadrans, quòd nullus alter hujuſmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujuſvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, ſi obliquior is fuerit, $NZ \sqsupset \frac{1}{4} N\varpi$; ſin rectior fuerit, erit $NZ \sqsubset \frac{1}{4} N\varpi$ (nimirum è proximè demonſtratis hæc conſequuntur) quæ repugnant hypotheſi.

Fig. 77. XV. Quinetiam ipſi $N\varpi$ propiùs adjacentium occurſus puncto Z viciniores ſunt, hinc indè. Secent, inquam, radiorum LM, RS reflexi $L\mu$, $R\sigma$ ipſam $N\varpi$ punctis Y, X; iſtæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit $ZY \sqsupset ZX$. Nam connectantur $R\varpi$, $L\varpi$; & fiat ang. $\varpi LH =$ ang. $N\varpi L$; ducantúrque rectæ RH, RY. eſtque $RH \sqsubset LH = H\varpi$; adeóque ang. $H\varpi R \sqsubset$ ang. $HR\varpi$; & proinde ang. $NHR \sqsupset 2$ ang. $H\varpi R$. item $YR \sqsubset YL = YH$; proindéque rurſus ang. $NYR \sqsupset 2$ ang. YHR. quare multo minor eſt ang. NYR quadruplo $N\varpi R$ eſt autem ang. NXR quadruplus anguli $N\varpi R$; igitur ang. $NXR \sqsubset$ ang. NYR. ponatur jam, ſi fieri poteſt, punctum X ipſis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus NYR interno NXR major; atqui minor oſtenſus eſt. quæ repugnant. itaque potiùs eſt $ZY \sqsupset ZX$: Q. E. D.

Ad alteras partes haud abſimilis erit diſcurſus; parco faſtidioſæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad eaſdem partes incidentium reflexos ſeſe priùs (velut ad φ) quàm ipſum $N\varpi$ decuſſare.

XVII. Quinimò rurſus hinc conſtat ad eaſdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem deſtinatum attingamus ſcopum)

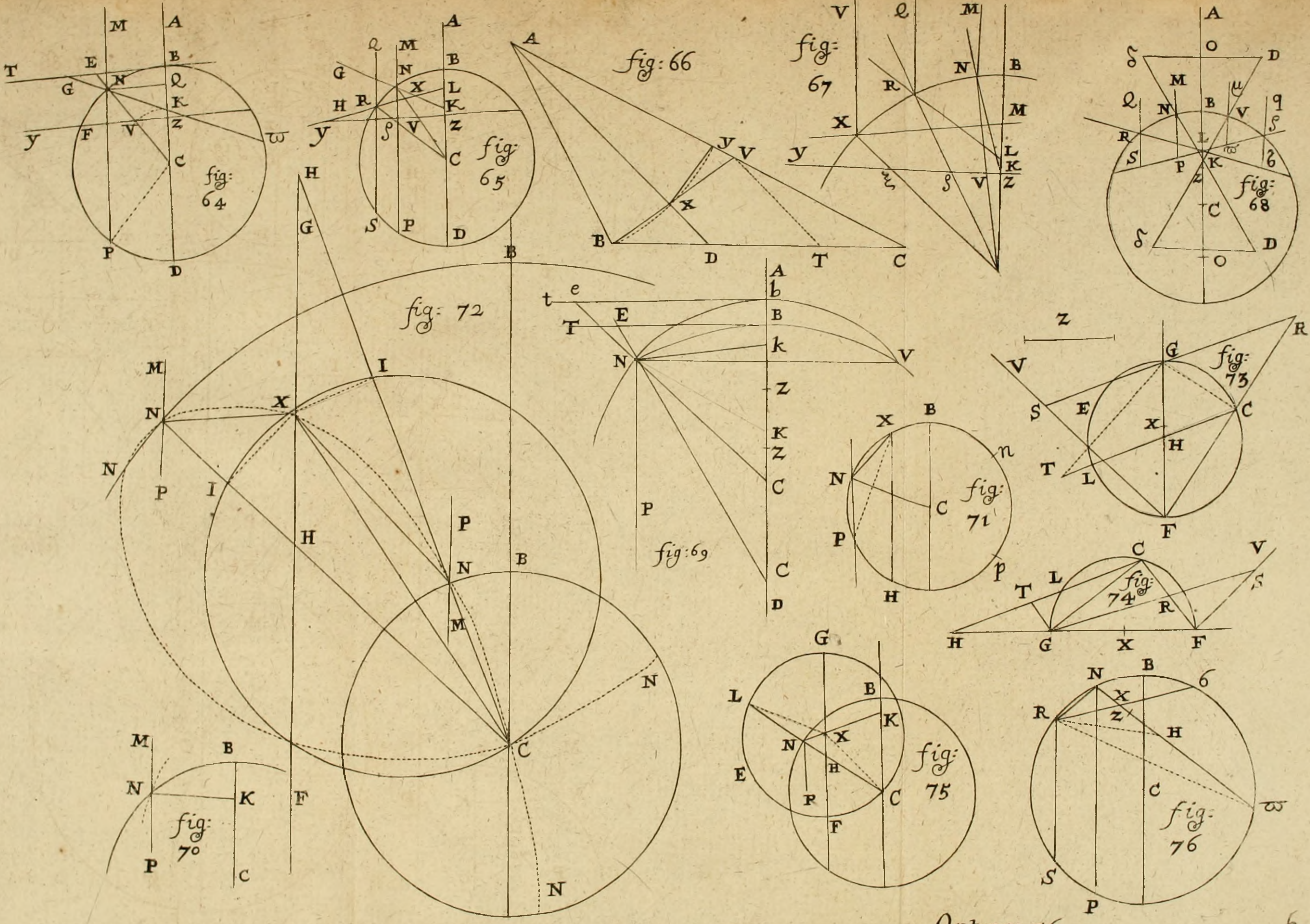


fig: 64
T
E
N
G
M
A
B
Q
K
Z
y
F
V
ω
C
P
D
fig: 65
Q
M
N
A
B
G
X
L
H
R
K
Z
y
ς
V
C
S
P
D
fig: 66
A
y
V
X
B
D
T
C
fig: 67
V
Q
M
N
B
R
X
M
y
L
K
Z
ξ
ς
V
fig: 68
A
O
D
M
Q
N
B
u
V
q
R
L
ϖ
S
P
K
Z
C
O
fig: 69
t
e
b
A
B
E
T
k
N
V
Z
K
Z
C
P
C
D
fig: 70
M
N
B
K
P
C
fig: 71
X
B
n
N
C
P
H
p
fig: 72
H
G
B
I
M
N
X
N
P
I
H
P
N
B
M
C
N
N
F
fig: 73
Z
G
R
V
S
E
C
X
H
T
L
F
fig: 74
C
V
L
T
R
S
H
G
X
F
fig: 75
G
L
B
K
N
X
H
E
R
C
F
fig: 76
N
B
6
R
X
Z
H
C
ϖ
S
P

Opt pag 56

6

è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uſpiam in ipſa $N\varpi$ ponitur, circa punctum Z (ipſam $N\varpi$ prænotato modo quadriſecans) radiantis imago conſpicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per cujuſce terminos tranſeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iſte ſecet ipſum $N\varpi$ in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipſo R S, rectiorum ipſo L M nullus oculum intrabit; utì ſuprà non ſemel argumentati ſumus, intra ſpatium X Y neceſſariò conſiſtet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi $N\varpi$ propiùs adjacentes perpendiculariùs oculum feriunt, ìdque ſpiſſiùs (ut ex analogia par eſt exiſtimare; nec enim id operoſiùs aggrediar demonſtrare) propter aliquoties expoſitas cauſas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc eſt ad ipſum imago conſiſtet. Accedit quod ob anguſtiam pupillæ ſpatium X Y ſatis modicum exiſtit; ut puncti modum vix excedere videatur.

Fig. 78.

XIX. Subdo; ſi ſtatuatur oculi centrum uſpiam in Z N; ìſque verſus partes N obvertatur; objectum confuſiùs apparere; quippe cùm reflexi viſum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone viſum conſiſtit.

XX. Hinc à ſpeculo Cavo tantùm una repræſentatur Imago, ſaltem bene diſtincta. Nam in duorum reflexorum $N\varpi$, $R\sigma$ concurſu X ſtatuatur oculi centrum; & ſit $R\zeta = \frac{3}{4} R\sigma$; unde $R\zeta \sqsupset RX$. itaque ſpectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, verſúſque partes N R obverſo; ſed tum imago Z poſt oculum conſiſtit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, ſerióquè perpenſa vix addubito quin facilè ſibi fidem conciliatura ſint; nihil ut ſit opus adverſantia *ſeu veterum Opticorum decreta*, *ſeu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perſpicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque diſcordant. Cætera verò ſiqua reſtant ad hoc argumentum ſpectantia ſtudio veſtro commendabimus elicienda; mox ad è ſenſibiliter finita diſtantia radiantis puncti *Symptomata* ſimiliter exploranda animum adjecturi.

Lect. VIII.

I QUæ radiis obveniunt à longinquo punȼto manantibus, adeóque quaſi parallelis, ex refleȼtione peripheriam ad circularem peraȼtâ; ubinam & quouſque vel ſibimet ipſis occurrunt, vel axem interſecant; quo loco radians oculo ubicunque conſtituto repræſentant, in poſtremis eſt diſſertatum. ad punȼtum jam accedimus radios ejiciens ſenſibiliter divergentes. Et hujuſmodi quidem punȼto, quanquam ſeu in obverſas circuli Convexas partes ſeu ad concavas radiet communia pleraque ſymptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præſertímque majoris evidentiæ causâ, caſus iſtos diſtinȼtè proſequemur; illum fuſiùs imprimis, hunc aliquanto conciſiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à punȼto A quilibet incidat radius AN, íſque refleȼtatur in NG; patet reflexum GN produȼtum axi AC occurſurum. nam duȼtâ CNE patet GN produȼtum angulum ANC ſecare; nec non ideò trianguli ANC baſin AC; puta in K; quo poſito.

III. Dico fore AC.AN::KC.KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. eſt igitnr ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è ſuperius generatim oſtenſis conſeȼtatur. adeóque NH = NK. itâque cùm ſit AC.AN::KC.HN. erit etiam AC. AN::KC.KN.

IV. Corollarii loco notetur (duȼtâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP aſſimilari; vel eſſe HK.HN::NP. CN.

V. Porrò, conſtantibus iiſdem, dico fore AC. KC::ACq − ANq. CNq. Nam eſt NP.CN + AN.CN = HK. HN + AN. CN = HK × AN. HN × CN = AN. HN

$+HK.CN.=AC.KC+AK.AC=AK.KC$. verùm eſt $NP.CN+AN.CN=NP\times AN.CNq$. ergò erit $AK.KC::NP\times AN.CNq$. componendóque $AC.KC::NP\times AN+CNq.CNq$. cum ſit igitur $NP\times AN=AP\times AN-ANq$. & $AP\times AN=ACq-CNq$; adeóque $NP\times AN+CNq=ACq-CNq-ANq+CNq;=ACq-ANq$. erit $AC.KC::ACq-ANq.CNq$: Quod E.D. Fig. 79, 80.

Coroll. $AK.KC::AN\times NP.CNq$.

VI. Etiam hoc *Theorema* ſubdemus: Si fiat $2CA.CN::CN.E$. & $2CK.CN::CN.F$; & ſumatur $CQ=E+F$; erit ducta NQ ad CA perpendicularis. vel reciprocè; poſito quòd ſit NQ ad CA perpendicularis; erit $CQ=E+F$. || Nam (ut hoc poſterius oſtendamus) quoniam eſt $2CA.CN::CN.E$. & $CN.2CK::F.CN$. erit ex æquo perturbatè $2CA.2CK::F.E$. vel $CA.CK::F.E$. componendóque $CA+CK.CK::F+E.E$. Porrò quoniam eſt $ANq=ACq+CNq-2AC\times CQ$; erit $2AC\times CQ-CNq=ACq-ANq$. itaque (juxta præcedentem) erit $2AC\times CQ-CNq.CNQ::AC.CK$. hoc eſt (ob $CNq=2AC\times E$) $2AC\times CQ-2AC\times E.2AC\times E::AC.CK$. hoc eſt $CQ-E.E::AC.CK$. vel componendo $CQ.E::AC+CK.CK$. erat autem $AC+CK.CK::F+E.E$. ergò $CQ=F+E$: Quod E.D.

VII. Ex iſtis porrò deducetur, ſi dividatur Semidiameter BC in Z, ut ſit $AC.AB::CZ.BZ$; punctum Z limes erit citra quem (reſpectu centri C) nullus hujuſmodi reflexus axem decuſſabit. Cujuſvis, inquam, radii AN eſto reflexus GN; axi occurrens in K. dico fore $CK\sqsubset CZ$. Nam ob hypotheſin (permutandóque) eſt $AC.CZ::AB.BZ$. igitur (antecedentes, & conſequentes copulando) $AC.CZ::AC+AB.CB$. quare (poſterioris hujuſce rationis utrumque terminum in æquales $AC-AB$, & BC ducendo) erit $AC.CZ::ACq-ABq.CBq$. eſt autem $ACq-ABq\sqsubset ACq-ANq$; adeóque $ACq-ABq.CBq.\sqsubset ACq-ANq.CBq::AC.CK$ (è mox oſtenſis hoc) quapropter erit $AC.CZ\sqsubset AC.CK$. indéque $CK\sqsubset CZ$: Fig. 81, 82.
Q.E.D.

VIII. Aliter hoc idem; ut quibuſdam fortaſſe videbitur, minùs involutè: per N ducatur VT circulum contingens. & quoniam NT biſecat angulum ANK; erit $AN . NK :: AT . TK \sqsupset AB . BK$. quare $BZ . AB + AN . NK \sqsupset BZ . AB + AB . BK$ (communem adſciſcendo rationem BZ ad AB). eſt autem $BZ . AB + AN . NK = CZ . AC + AC . CK = CZ . CK$ & $BZ . AB + AB . BK = BZ . BK$. ergo $CZ . CK \sqsupset BZ . BK$. permutandóque $CZ . BZ \sqsupset CK . BK$. quin & componendo $CB . BZ \sqsupset CB . BK$. ideóque $BZ \sqsubset BK$; quare punctum Z centro propinquius eſt, quàm ipſum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc ſi puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A ſit à ſpeculo remotiùs, quàm α) erit $CZ \sqsupset C\zeta$. Nam eſt $BC . AB \sqsupset BC , \alpha B$. adeóque compoſitè $AC . AB \sqsupset \alpha C . \alpha B$. hoc eſt $CZ . BZ \sqsupset C\zeta . B\zeta$. quare componendo $BC . BZ \sqsupset BC . B\zeta$. & indè $BZ \sqsubset B\zeta$.

IX. Porrò, conſectatur è præmiſſis, quòd ſi duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem interſecent punctis K, L; erit $CL , CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$. || Nam quoniam eſt $AC . CK :: ACq - ANq . CBq$. itémque $CL . AC :: CBq . ACq - ARq$. erit ex æquo perturbatè $CL . CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$.

X. Simili planè diſcurſu, ſi fuerit $AC . AB :: CZ . ZB$; erit $CZ . CK :: ACq - ANq . ACq - ABq$. & $CL . CZ :: ACq - ARq . ACq - ABq$.

XI. Hinc perſpicuum eſt obliquioris reflexi concurſum à centro magìs elongari quàm rectioris; quòd nempe ſit $CL \sqsubset CK$. Cùm enim ſit $ACq - ANq \sqsubset ACq - ARq$; erit $CL \sqsubset CK$.

XII. Hinc neceſſariò duo quilibet ad eaſdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) ſeſe priùs quam axem interſecabunt, puta ad X. quo poſito.

XIII. Adnotari poteſt angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus incluſum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ; vel, duplo angulo NCR unà cum ang. NAR. || Etenim

Fig. 83.

ang. $KXL =$ ang. $ALR - AKN =$ ang. $ACR + CRL -$: ang. $ACN + CNK =$ ang. $ACR - ACN +$: ang $CRL - CNK =$ ang $NCR +$: ang $CRS - CNP$. || Quinetiam ang. $CRS - CNP =$ ang. $RCA + CAR -$: ang. $NCA +$ CAN

$CAN =$ ang. $NCR + NAR$. itaque rurſus ang. $KXL = 2$ ang. $NCR +$ ang. NAR. liquent igitur quæ propoſita ſunt; in uſum (ſi fortè) ſequentium. pro quibus itidem hæc proponenda ſunt.

XIV. Etiam palàm eſt è dictis ipſos reflexos GN, HR directè procurrentes à ſe divergere; adeóque duntaxat unum hujuſmodi reflexum oculi centrum tranſire; conſequentèr & puncti A tantùm unam à convexo ſpeculo imaginem exhiberi. Fig. 83.

XV. *Lemmatia* 1. Sint quæcunque tria quanta A, B, C; primóque ſit $A.B \sqsubset B.C$; dico fore $A + C \sqsubset 2B$. ponatur enim fore $A.B :: B.E$. erit ergò $A + E \sqsubset 2B$. quinetiam erit ergò $B.E \sqsubset B.C$ adeóque $C \sqsubset E$. ergo magis $A + C \sqsubset 2B$.

2. Sit (iiſdem adhibitis quantis) ſecundò $A + C \sqsupset 2B$. dico fore $A.B \sqsupset B.C$. nam ſive dicatur eſſe $A.B :: B.C$. vel $A.B \sqsubset B.C$. ſequetur utrobique fore $A + C \sqsubset 2B$; contra hypotheſin. itaque potiùs eſt $A.B \sqsupset B.C$.

XVI. Etiam hoc adjungo. Si duo ſumantur ad eaſdem axi partes (circulíque convexâ parte comprehenſi) ſibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$. Fig. 84.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; ſint item NP, RQ ad AC parallelæ ducantúrque ſubtenſæ NR, RX.; & quoniam ang. $RXQ \sqsubset$ ang. NRP; patet eſſe $RX.RQ \sqsupset NR.NP$; adeóque cum $RX = NR$, erit $RQ \sqsubset NP$; hoc eſt $FG \sqsubset EF$. ergò $2CF \sqsubset CE + CG$; unde $4AC \times CF \sqsubset 2AC \times CE + 2AC \times CG$ atqui eſt $ANq = ACq + CNq - 2AC \times CE$. & $AXq = ACq + CNq - 2AC \times CG$. & $2ARq = 2ACq + 2CNq - 4AC \times CF$. ergo $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$.

Addo, ſequentium gratiâ, ſi punctum A ſumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua ſimiliter apparentur; fore contrà, tum $ANq + AXq \sqsupset 2ARq$. nam in eo caſu eſt $ANq + AXq = 2ACq + 2CNq + 2AC \times CE + 2AC \times CG$. & $2ARq = 2ACq + 2CNq + 4AC \times CF$. unde liquet propoſitum.

XVII. Sint jam ad eaſdem axis partes duo quilibet æquales arcus

N R, R X ; & incidentinm A N, A R, A X reflexi G N, H R, I X
Fig. 85. axi occurrant producti punctis K, L, M ; erit intervallum M L ab obliquiorum occurſibus concluſum majus ipſo L K rectiorum occurſibus intercepto.

Nam quoniam eſt $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$. erit $2ACq - ANq - AXq \sqsupset 2ACq - 2ARq$. adeoque $ACq - AXq . ACq - ARq \sqsupset ACq - ARq . ACq - ANq$. hoc eſt, è præmonſtratis, $CL . CM \sqsupset CK . CL$; vel inverſe $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quapropter erit $CM + CK . \sqsubset 2CL$. & ideò $CM - CL \sqsubset CL - CK$ hoc eſt $ML \sqsubset LK$: Q. E. D.

XVIII. Hinc conſtat, etiam in hac hypotheſi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magìs inſpiſſari; ſeu ſpatio verſus limitem Z arctiore conſtringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, ſi uſpiam in axe (velut ad O) conſtituatur oculi centrum, quòd punctum A neceſſa-
Fig. 85. riò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorſus ut in præcedente quoad radios ab infinitè diſſito puncto manantes hypotheſi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copioſiores, tum axi viciniores, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui faciliùs re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta ſimul ac emergentem propoſiti conſequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro viſu extra radiationis axem collocato iidem imaginis ſedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obſcuritate fortaſſis nimia videbuntur. itaque jam opportunum autumo deſiſtere.

LECT. IX.

I. QUaliter in obverſum Speculi circularis convexum finitè diſtans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta conſtituto per ipſum radians & ſpeculi centrum trajecta poſtremò conniſi demonſtrare; nunc idem quoad aſpectum aliàs ubicunque ſitum aggredimur expiſcari. quò primum attinet ut rectam inveſtigemus, in qua conſiſtet Imago; tum ut punctum ejus in iſta recta præciſum determinemus. & primo quidem negotio ſatisfactum erit hujuſmodi *Problema* conficiendo; quod (ſequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datiſque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum tranſeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) ſint ambo in circuli peripheria, Fig. 86. manifeſtum eſt biſecto arcu A X in N, connexiſque ſubtenſis N A, N X, rectas N A, N X ſibi mutuò reflexas fore; ſeu, junctâ C N, angulum C N X angulo C N A æquari.

2. Etiam ſi datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, Fig. 87. connexis A X, C X, factóque angulo C X H = C X A, fore X A, X H alterum alterius reflexum.

3. Item ſi data puncta (A, X) æqualiter à centro diſtent; connexis rectis A C, X C, biſectóque angulo X C A à recta C N circulum reflectentem interſecante ad N; perſpicuum eſt conjunctas rectas A N, X N, invicem in ſe reflecti; vel angulum C N X ipſi C N A æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo exiſtant in recta per reflectentis centrum tranſeunte (nempe A B K C.)

1. Fiat C K . A C : : C B . T . ac inter C B, & T ſit proportione Fig. 89. media V (unde C B q . V q : : C B . T : : C K . A C) . tum centro A, intervallo √ : : A C q — V q . deſcribatur circulus reflectentem

ſecans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipſius AN reflexa erit.

Fig. 89. Nam ob $ANq = ACq - Vq$. erit $Vq = ACq - ANq$. adeoque $CBq \,.\, ACq - ANq :: (CBq \,.\, Vq ::)\ CK \,.\, AC$. quod, è præmonſtratis, reflectioni proprium eſt. ergò liquet propoſitum.

2. Ita quidem in hoc caſu; at ſi punctum A ponatur aliàs, ut ſit $AC \sqsupset AN$; reliquis ſtantibus, Sumendum erit intervallum $AN = \surd : ACq + Vq$; ut ſit $ANq - ACq = Vq$. ut poſthac conſtabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat $2\,CK \,.\, CB :: CB \,.\, E$. & $2\,CA \,.\, CB :: CB \,.\, E$. ſumatúrque $CQ = E + F$. & ducta QN ad AC perpendicularis circulum ſecet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è ſuprà dictis liquidò conſectatur. At ſi fuerit $AN \sqsubset AC$; tum accipi debet $CQ = F - E$; & (reliquis nihil immutatis, utì poſtmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra caſus hos *Problema*, ceu videtis, facilè conſtruitur; aſt illos; alióſque ſpeciales, ſi qui ſunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum eſt, & certè δυσμήχανον; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicaríque poterit ſibi peculiarem, hoc vel adſimili modo deſcribendam.

Fig. 90. Connexâ CA, ſuper diametrum CA deſcribatur circulus AIC; item ſemidiametro CA deſcribatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC ſecantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG ſecent punctis H; demum per H, & X rectæ ducantur ipſas CI decuſſantes punctis N. per hujuſmodi puncta quævis deſignabilia tranſibit linea, *Problematis* expoſiti ſolutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis interſectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine ſubinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus eſt, erit recta AH biſecta in I. adeóque triangula ANI, HNI ſibimet æqualia prorſus & æquiangala erunt; & ſpeciatim ang. INA = ang. INX. unde patet propoſitum.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujuſmodi conſtructiones, etſi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magìs in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-

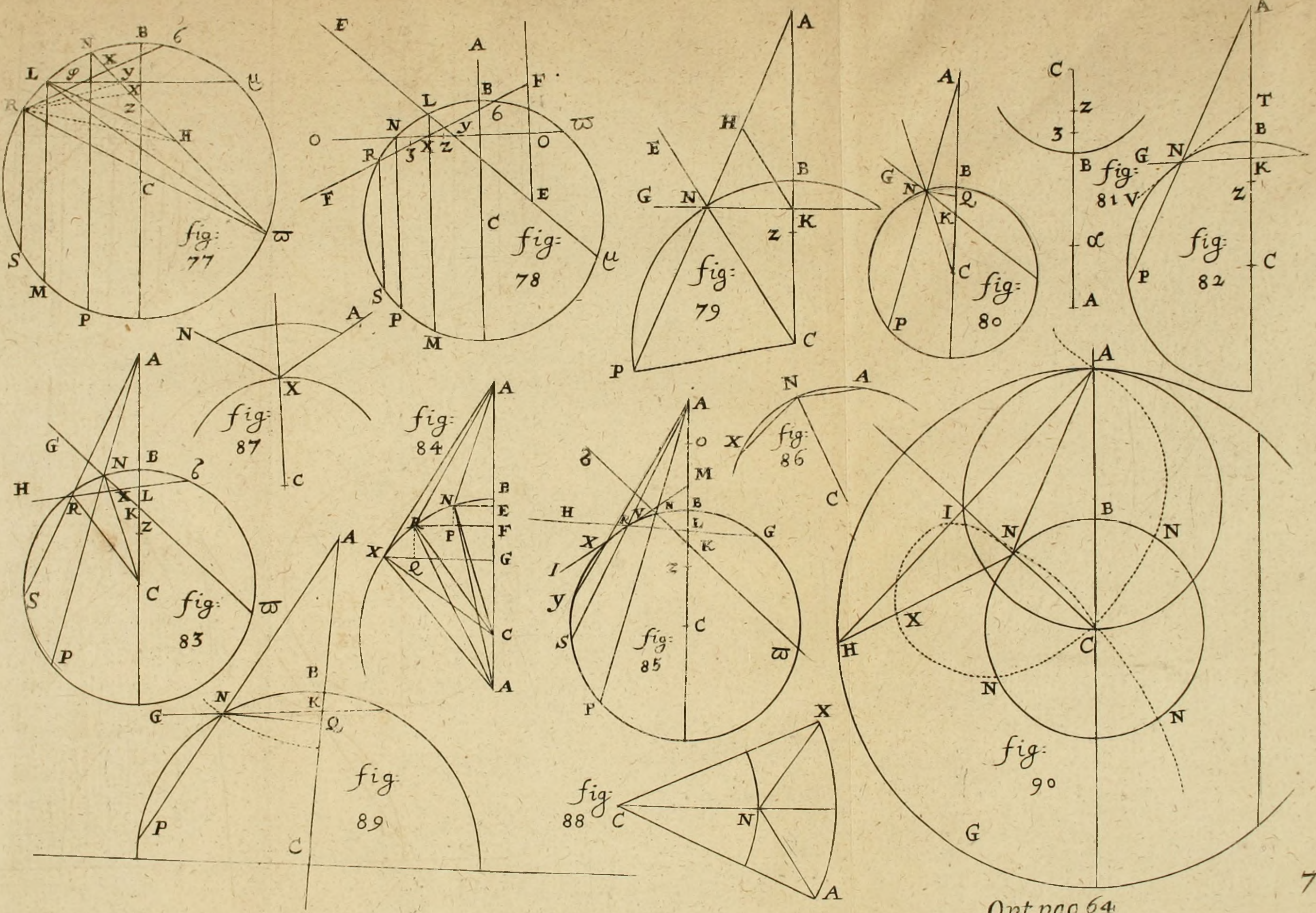


fig: 77
L
N
B
X
y
X
z
H
C
R
S
M
P
ϖ
fig: 78
E
A
B
F
L
N
y
z
X
O
R
F
C
E
S
P
M
fig: 79
A
H
E
G
N
B
K
z
C
P
fig: 80
A
G
N
B
Q
K
C
P
fig: 81
C
z
3
B
V
α
A
fig: 82
A
T
B
G
N
K
z
C
P
fig: 87
N
A
X
C
fig: 83
A
G
N
B
H
R
X
L
K
Z
C
S
P
ϖ
fig: 84
A
B
N
E
R
F
P
X
G
Q
C
A
fig: 85
A
o
M
H
B
L
G
K
X
I
y
z
C
S
P
ϖ
fig: 86
N
A
X
C
fig: 89
A
B
N
K
G
Q
P
C
fig: 88
X
C
N
A
fig: 90
A
I
B
N
N
X
H
C
N
N
G

Opt pag 64

nihilominùs gravatim admittuntur; iſtâ tantummodò raptim inſinuatâ, ſubnectemus aliam ab illorum guſtu non abhorrentem; illam nempe (quando ſcilicet haud alia melior ut varias pertentans analyſes, & hoc in alia complura *Problemata* transformans exiſtimari poſſum, facilè poſſit excogitari; quum & operæ meæ ſatìs alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazenus Arabs* ſcriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate ſimul ac obſcuritate; neque non ab incondita ſermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorſum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema*.

Fig. 91.

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus ſit; & in hujus uno crure P N adſignetur punctum F; per F recta ducenda eſt, quæ reliquum latus D P (protractam nempe) ac hypotenuſam D N ità ſecet, ut ab illis intercepta ad ſegmentum hypotenuſæ lateri primò conterminum datam obtineat proportionem R ad S.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N deſcribatur Circulus H F N (is nempe per F tranſibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. ſit etiam R. S :: D F. T. & à puncto I ducatur recta I L K diametrum H N interſecans ad L, & circulo occurrens in K, ità quidem ut ſit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præſtetur in ſuperioribus oſtenſum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipſam D P ſecans in X. Dico factum, vel ipſe C X. C N :: R. S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang. F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C ſimile triangulo L K C; ac indè F D. D C :: K L. C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C; erunt triangula X D C, N K C ſibi quoque ſimilia, proindéque D C. C X :: C K. C N. quapropter erit ex æqnali F D. C X :: K L. C N. vel permutando F D. C K :: C X. C N; hoc eſt F D. T (vel R. S) :: C X. C N; quod faciendum erat.

Conſtr. &.

Advertendum eſt autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protenſa variè ſtatui poteſt; vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in iſtorum caſuum ſingulo quoque recta I K (conditione gaudens præſtitutâ) plurifariàm duci poteſt; ut antehac inculcatum; unde plures emergent ſolutiones. at quoad omnes caſus perſimilis erit conſtructio, nec ferè diverſa demonſtratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus centrum C) datáque ſint duo puncta A, X; reperiendum eſt in circumferentia punctum aliquod; à quo ductæ ad A, X rectæ, altera ſit alterius reflexa. || Hoc ita perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ AC, XC; & fiat (ſeorſim) ang. $\delta = \frac{1}{2}$ ang. ACX. & in $\xi\delta$ crure anguli δ ſumpto liberè puncto ϖ ducatur ϖV ad $\xi\delta$ perpendicularis alterum crus ſecans in V; & in $V\varpi$ protracta capiatur $\varpi\gamma = \varpi V$; tum dividatur γV in φ, ut ſit $\gamma\varphi . \varphi V :: XC . CA$; Lem. præced. perque punctum φ trajiciatur $\kappa\xi$ ſic ut ſit $\kappa\xi . \kappa\nu :: CX . CN$. denique fiat angulus XCN æqualis angulo $\xi\kappa\nu$; erit punctum N quale deſideramus. Nam ducantur XN, $\xi\nu$; & fiat ang. CNG = ang. $\kappa\nu\gamma$. adſumatúrque PG = PN; & connectatur XG. liquet jam trangula XCN, $\xi\kappa\nu$ ſimilia fore; nec non ipſa CNF, $\kappa\nu\varphi$; & ipſa XPF, $\xi\varpi\varphi$; ipſáque demùm XFN, $\xi\varphi\nu$ aſſimilari. quare $PF . XF :: \varpi\varphi . \xi\varphi$. & $XF . FN :: \xi\varphi . \varphi V$. & ex æquo $PF . FN :: \varpi\varphi . \varphi V$. & antecedentes duplando $2PF . FN :: 2\varpi\varphi . \varphi V$. componendóque $2PF + FN . FN :: 2\varpi\varphi + \varphi V . \varphi V$. hoc eſt $GF . FN :: \gamma\varphi . \varphi V$ (hoc eſt) :: XC . CA. ducatur jam NL ad XG parallela; quare eſt ang. LNG = ang. G = ang. XNG; & XG (XN) . NL :: GF . FN :: XC . CA. porro fiat ang. LNH = ang. XCA; & HN protracta ipſi CA occurrat in M; eſtque propterea triangulum HNL ſimile triangulo HGM; idcircóque HC . CM :: HN . NL. ducatur denuò tangens NQ; eſtque tum ang. PNQ = rect — CNP = rect — $\kappa V\varpi$ = ang. $\delta = \frac{1}{2}$ XCA; vel 2 ang. PNQ = ang XCA = ang LNH. verùm erat prius 2 ang. XNF = ang. XNL. ergo 2 ang XNF — 2 ang PNQ = ang XNL — ang. LNH. hoc eſt 2 ang XNQ = ang. XNH. ergo tangens NQ biſecat angulum XNH; indeque conſectatur fore rectam HM ipſius XN reflexam; ac ideò eſſe XC . HC :: XN . HN. atqui fuit prius HC . CM :: HN . NL quare jam erit ex æquo XC . CM :: XN . NL (hoc eſt etiam è præmonſtratis) :: XC . CA. unde CM = CA. quapropter HM, ipſius XN reflexa tranſit per A: Quod propoſitum erat efficere. ||

VIII. Hujuſce *Problematis* ita generaliùs propoſiti varii quidem caſus ſunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque poſitum eſt intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum caſuum unoquoque pluries conficitur negotium) aſt ubique non abſimilis erit conſtructio; ſanè nimius eſſem; meamque pariter ac veſtram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; ſuffecerit ejuſce ſpecimen aliquod protuliſſe.

IX Adnotabimus tantùm quòd ex *Problematis* hujuſce natura conſtructioneque propoſita ſatìs attendenti conſtabit (utique ſicut in *Hypotheſibus* antehac tractatis uberiùs eſt declaratum) duorum tantùm ad eaſdem axis partes incidentium reflexos ad unum ſeſe punctum decuſſare. nam aliorum unius (qui ſubinde poteſt dari) vel alterius reflexi per ejuſmodi punctum tranſeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus eluceſcit datis puncti radiantis, oculíque poſitione deſignari poteſt linea quævis, in qua dicti puncti ſpecies apparebit; incumbit proximè punctum in ea præciſum determinare, ad quo eadem conſiſtit. eo ſpectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii AN, AR Fig. 95, 96.
in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum NR (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum PS; eorum verò reflexi intercipiant arcum $\varpi\sigma$; erit arcus $\varpi\sigma$ æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcûs NR, & arcûs PS. Nam (1) in prima figura; eſt $PS + SR + RN = PN = N\varpi = \varpi\sigma + \sigma R - RN$; ergò, pares hinc indè SR, & σR ſubducendo, erit $PS + RN = \varpi\sigma - RN$. proindéque $PS + 2RN = \varpi\sigma$. (2). in altera figura; erit $PS + SR - RN = PN = N\varpi = RN + R\sigma - \sigma\varpi$. quarè rurſus æquales auferendo SR, $R\sigma$ manebit $PS - RN = RN - \sigma\varpi$ unde tranſponendo erit $\sigma\varpi = 2RN - PS$.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adſcribemus: Biſecetur recta NP in E; Fig. 94.
& ubivis ſumatur punctum A; erit $EA = \dfrac{PA \pm: NA}{2}$. Nam

$$EA = \frac{PN}{2} \pm: AN = \frac{PN \pm: 2AN}{2} = \frac{PA \pm: AN}{2}.$$

XII. Exhinc, ut propoſitum citiùs attingamus, Suppoſito radios Fig. 95, 96.
AN, AR (quoad caſum præſentem) ſibi quàm proximos incidere, punctum deſignabimus ad quod ipſorum reflexi $N\varpi$, $R\sigma$ concurrunt; dicimus utique ſi dicti reflexi concurrant ad Z; biſectis ſubtenſis NP, $N\varpi$ in E, & F; fore $FZ . ZN :: EA . NA$. || Nam quoniam arcus NR, PS ex hypotheſi ſunt indefinitè parvi (ſeu minimi) ſe habebunt ut ſuæ ſubtenſæ; nec non idem de arcubus NR, $\varpi\sigma$ dici poteſt. igitur arc. $PS . RN :: PS . RN :: PA . RA$. (hoc eſt ob RA, NA nihil, ex eadem hypotheſi, differentes) $:: PA . NA$. ergò, bis componendo, erit $PS + 2RN . RN :: PA + 2NA . NA$.

hoc

hoc eſt $\sigma\varpi . RN :: PA + 2NA . NA$. eſt autem arc $\sigma\varpi . RN ::$ ſubtenſa $\sigma\varpi . RN :: \varpi Z . ZR :: \varpi Z . ZN$. ergo $\varpi Z . ZN :: PA + 2NA . NA$. & componendo $\varpi N . ZN :: PA + 3NA . NA$ & antecedentes ſubduplando $FN . ZN :: \frac{PA + 3NA}{2} . NA$. denique dividendo $FZ . ZN :: \frac{PA + NA}{2} . NA$. eſt autem $EA = \frac{PA + NA}{2}$. ergò tandem eſt $FZ . ZN :: EA . NA$: Q. E. D.

Fig. 95, 96.

XIII. Hinc colligitur punctum Z eſſe locum ipſiſſimum, circa quem puncti Z imago conſiſtit; oculi reſpectu in reflexo GNϖ conſtituti, tanquam ad O. etenim ſuperiùs nec ſemel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum eſt (ut jam ad inſtar regulæ legíſve ratum, fixúmque cenſeri queat) iſthic imaginem verſari, ubi propiorum incidenti principali (hoc eſt ei cujus reflexus oculi centrum tranſiens axis Optici vicem ſubit) radiorum reflexi principalem illum reflexum interſecant; itaque circa Z in hoc caſu verſatur.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, ſed nec ad *Geometrici* rigoris amuſſim præ illa quam in præcedentibus uſurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talíque quæ concluſionis adſertæ cauſam apprimè detegit. Enim verò ſi pleraque cuncta, quæ ſe oggerunt huc attinentia, minutatim ac moroſè perſequi vellem, immane quantum tædii (commodo veſtro fortaſſè non tanto) mihimet accerſerem, & temporis plurimum veſtri pariter ac mei exhaurirem. ſuffecerit itaque jam, & poſthac in reliquis Hypotheſibus ſufficiat, viâ quàm breviſſimâ (modo tamen certiſſimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda. ||

LECT. X.

I. IN poſtrema Lectione quod ſpectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magìs ἐν τύπῳ, contemplabimur. & quidem caſuum præcipuorum diverſitatem imprimìs diſtinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta A C protendatur indefinitè; quo poſito.

II. 1. Incidat radius A N; & ſit $AN = AC$; erit ipſius A N reflexus, puta $N\alpha$, ad A C parallelus. Fig. 97.

Hoc è ſupra generatim oſtenſis conſtat; & facilè jam patet, connexâ C A. etenim eſt ang. $ACN = ANC$; ob A C, A N, ex Hypotheſi pares; & ang. $ANC = \alpha NC$, propter reflectionem; adeóque ang. $ACN = \alpha NC$; unde ſunt A C, $N\alpha$ ſibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius A M major ipsâ A C; ejus reflexus (puta $M\alpha$) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, reſpectu puncti A; (hoc eſt centrum C puncto radianti, concurſuíque interjacebit). Fig. 98.

Nam ob $AM \sqsubset AC$, erit ang. $ACM \sqsubset AMC = CM\alpha$; ergò ang. $BCM + CM\alpha \sqsupset$ ang. $BCM + ACM = 2$ rect. quare $M\alpha$, C B convenient infra C M ad partes α B; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius A R; & ſit A R minor ipsâ A C; ejus reflexus, puta $R\alpha$, axi retrò protractus occurret. (hoc eſt ut radians centro, concurſuíque ſit interjectum). Fig. 99.

Nam hic ob $AR \sqsupset AC$; erit ang. $ACR \sqsupset$ ang $ARC =$ ang. αRC. quapropter ang. $DCR + \alpha RC \sqsubset 2$ rect. unde patet ipſas D C, αR portractas infra C R concurrere.

V. Horum caſuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis caſibus convenientes medius diſterminat. Fig. 101. de poſteribus itaque duobus ſeparatim paullò diſpiciamus; Sit jam itaque primò $AC = AG = A\gamma$; unde quilibet incidens cavo $GB\gamma$ radius (ut AN) major erit quam AC; hujus itaque reflexus axem ſecet puncto K; dico, ſi ſemidiameter CB dividatur in Z; ut ſit $CZ . $ Fig. 100. $ZB :: AC . AB$; fore $CK \sqsubset CZ$. etenim ob angulum ANK biſectum, erit $AC . CK :: AN . NK$. vel permutando $AC . AN :: CK . NK$. eſt autem $AC . AB \sqsupset AC . AN$ ergo $AC . AB \sqsupset CK . NK \sqsupset CK . BK$. ergò cùm ſit, ex hypotheſi, $CZ . ZB :: AC . AB$; erit $CZ . ZB \sqsupset CK . BK$. componendóque $CB . ZB . \sqsupset CB . KB$. unde $ZB \sqsubset KB$; ſeu $CZ \sqsupset CK$: Q. E. D.

VI. Hinc punctum Z eſt limes infra quem, Verſus centrum, nullus reflexus axem interſecat.

Coroll. Hinc ſi puncta Z, ζ ſint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit $CZ \sqsubset C\zeta$.

Nam $BC . AC \sqsupset BC . \alpha C$. componendóque $AB . AC \sqsupset \alpha B . \alpha C$. hoc eſt $ZB . ZC \sqsupset \zeta B . \zeta C$. vel compoſitè $CB . ZC \sqsupset CB . \zeta C$. ergò $ZC \sqsubset \zeta C$.

VII. Quinetiam erit in hoc caſu; $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$. Nam ducatur KH ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H; & connectatur CP; & eodem planè modo quo ſuperiùs (in iis quæ circa convexas partes attigimus) oſtendetur fore $AN \times NP . CNq :: AK . CK$. unde diviſim erit $AN \times NP - CNq . CNq :: AC . CK$. eſt autem $AN \times NP = ANq - AN \times AP = ANq - : ACq - CNq = ANq - ACq + CNq$; adeóque $AN \times NP - CNq = ANq - ACq$. ergò demum erit $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$: Q. E. D.

Notetur; ſi fuerit AC minor ſemiſſe ſemidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad eaſdem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; ſin AC major fuerit iſtâ Semiſſe, focis qui ad diverſos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interſeram *Theorema*, præmiſſis conforme: Si fiat $2 CK . CN :: CN . F$; itémque $2 CA . CN :: CN . E$;

&

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit $CQ = F - E$. || Nam (ut ſuprà) eſt $CA . CK :: F . E$. quare dividendo erit $CA - CK . CK :: F - E . E$. Item hic erit $ANq - ACq = 2 AC \times CQ + CNq$. adeóque $2 AC \times CQ + CNq . CNq :: AC . CK$. hoc eſt, (ob $CNq = 2 AC \times E$.) $2 AC \times CQ + 2 AC \times E . 2 AC \times E :: AC . CK$. hoc eſt $CQ + E . E :: AC . CK$. quare dividendo $CQ . E :: AC - CK . CK$. ergò $F - E = CQ$: Q. E. D.

IX. Porrò, ſi duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem ſecent punctis K, L; erit $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$. Nam ob $CK . AC :: CNq . ANq - ACq$. & $AC . CL :: ARq - ACq . CNq$. erit ex æquo perturbatè $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$.

X. Hinc ſi radius AR ſit ipſo AN obliquior; erit $CK \sqsupset CL$: Nam $ARq - ACq \sqsupset ANq - ACq$.

XI. Hinc palàm eſt reflexos NK, RL ſeſe priùs quàm axem decuſſare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico ſpatium LM, obliquiorum occurſibus interjectum, majus eſſe ſpatio LK, quod rectiorum continetur occurſibus. Nam è ſuprà monſtratis conſtat eſſe $ANq + AXq \sqsupset 2 ARq$. proindeque fore $ANq + AXq - 2 ACq \sqsupset 2 ARq - 2 ACq$. ac indè $ANq - ACq . ARq - ACq \sqsupset ARq - ACq . AXq - ACq$. hoc eſt $CL . CK \sqsupset CM . CL$. vel $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quare $CM + CK \sqsubset 2 CL$. & ideò $LM \sqsubset KL$. Fig. 102.

XIII. Hinc rectiùs ingruens lux à reflectione verſus axem condenſatior evadit.

XIV. Quidni demùm rurſus ex his inferatur, viſibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo uſpiam in AZ conſtituto, apparere?

XV. Adverſatur ſaltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo uſpiam in ZB collocato confuſiorem apparentiam objici; quippe cùm eum tunc reflexi convergentes appellant ; & imago diſtinctior Z poſt oculum conſiſtat. quin ejuſmodi complures apparentias obſervabitis ipſi ſi lubet, & ex his deducetis ||

XVI. Prætereà, *dato oculi centro, velut O, quomodo deſignandus ſit ipſum pervadens reflexus* (ceu Nϖ) è ſuprà tractatis aliquatenus
Fig. 103. adparet. nec inibi generaliùs expoſitum *Problema* libet hìc reponere.

XVII. Quinetiam antedicta recenſendo conſtabit, ſi biſecentur ſubtenſa PN in E; & ſubtenſa Nϖ in F; ac fiat FZ.ZN::EA.NA; radiantis imaginem, viſûs O reſpectu, circa punctum Z conſiſtere. planè ſimilis eſt diſcurſus, quorſum κοκκυζειν. ||

XVIII. Supereſt tantùm, ut de poſteriore quem innuebamus caſu paucula ſubdamus. Eò, ponatur AC = AG = Aγ; indè quilibet incidens cavo GBγ radius ipsâ AC minor erit; ſit talis alicujus AN reflexus Nϖ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hìc præcedentibus conformia deprehendentur, & ſuppari demonſtrabuntur modo; qualia ſunt nempe

XIX. AC.AN::CK.KN.

XX. ACq — ANq.CNq::AC.CK.

XXI. Radii AR ipſo AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit CK.CL::ACq — ARq.ACq — ANq. ac indè

XXII. CK ⊐ CL.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares, ut ſuperiùs, arcus in reflectente ſumendo) reflexi concurſus habent à ſe minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos caſus præmonſtratis conformia, vel agnata perſimili quoque quoad hunc caſum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; ſed enim id quod ubique præcipuum etiam hìc exertiùs oſtendam; præmiſſo tamen hoc, ad ſequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio:*

XXIV. Detur recta BC; in ea protracta deſignandum eſt punctum,
Fig. 104. velut Z; ità ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. ||
Id facilè ſic exequimur, ||

1. Si fuerit I $\sqsubset$ R; fiat I — R . R : : BC . CZ; quare componendo erit I . R : : BZ . CZ. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin I $\sqsupset$ R; fiat R — I . I : : BC . BZ. ergò rurſus componendo R . I : : CZ . BZ. vel inversè, I . R : : BZ . CZ.

XXV. Fiat jam CA . AB : : CZ . BZ; Dico punctum Z eſſe metam, citra quam (reſpectu centri C) nullus reflexus axem decuſſabit; hoc eſt præmiſſis inſiſtendo, fore CK $\sqsubset$ CZ.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo NK . NA : : KT . AT $\sqsupset$ BK . AB. quare NK . NA + AB . BZ $\sqsupset$ BK . AB + AB . BZ = BK . BZ. eſt verò NK . NA : : CK . CA. & AB . BZ : : CA . CZ. ergò CK . CA + CA . CZ $\sqsupset$ BK . BZ. hoc eſt CK . CZ $\sqsupset$ BK . BZ. vel permutando CK . BK $\sqsupset$ CZ . BZ. unde dividendo CB . BK $\sqsupset$ CB . BZ. adeóque BK $\sqsubset$ BZ. unde liquet propoſitum.

XXVI. Exhinc (ut in caſibus antè pertractatis) conſectatur ejuſmodi punctum Z eſſe locum ipſiſſimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA conſtituto; patétque quàm longè paſſim ab Opticis; nominatim à noviſſimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrioq;* in eo aſſignando loco aberratur; quorum ex ſententia verſatur is ad punctum (puta Q) tanto ſemotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipſo B diſtat. id quod præterquam quòd nullâ veriſimili ratione nititur (imò rationi prorſus adverſatur; cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam ſi tanquam circa punctum A accenſa candela ſpeculo cavo GBγ exponatur, oculo velut ad O ſito longè majori diſtans intervallo conſpicietur, quam ipſo BQ, quod ipſam AB exæquat. quinimò tantillo verſus centrum illum adducendo non æquali diſtantiâ, ſed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad ſenſum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præſtituta. quo circà diſcurſus noſter experientiæ ſuffragio conſtabilitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis reſpectu viſûs extra radiationis axem poſiti; determinatur is eodem ac in caſibus antecedaneis modo, biſecando ſcilicet ipſas NP, Nϖ punctis E, F; faciendóque EA . AN : : FZ . ZN. Adnotandum ſaltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum conſiſtere; ſed in obliquioribus intra illum, nempe ſi fuerit AE $\sqsubset$ AN punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB exiſtet; ſin $AE \sqsupset AN$, punctum Z verſus ϖ exiſtet; ſin $AE = AN$; concurſus infinitè diſtabit; ſeu proximus reflexus ipſi N ϖ parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, ſi $AE = AN$; erit $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN$ Fig. 106. $= 3ANq$; itaque punctum N, iſtos caſus diſterminans, facilè deſignatur.

Rationem ipſi tantillùm attendentes perſpicietis; mihi ſanè cunctas evolvendo minutias non animi ſatìs, non otii ſuppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forſan opportuniore prætermiſſam, obſervatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, viciſſim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad ſpeciales caſus facilè cernitur hoc conſectari. quin & hinc generatim verum apparebit ſatìs: Si fuerit Z ipſius A imago, tantum unus idcircò ab A manantium inflexus per Z tranſibit. (hoc imagini proprium eſſe ſæpiùs in decurſu inculcata ſatìs arguunt, ſuperque) quare reciprocè ſolus unus ab Z manantium inflexus per A tranſibit (nam ſi duo tales per A tranſire dicantur, etiam indè duo per Z tranſibunt, contra hypotheſin) erit igitur A ipſius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene ſerviens, & caſus inter ſe varios conferentibus affundens lucem) obſervatio generalibus intertexi; niſi quòd non omnia ſe nobis ſtatim produnt, & quædam in abſtractione ſumma non ità facilè vèl explicari poſſunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promoviſſe, haud diſparia (certè magìs nova, miniméque protrita) circa refractiones ſphæricas, ſeu circulares, attentabo.

Lect. XI.

Fig. 107. 108.

I. *Catoptricâ circulari defunctus ad Dioptricam promovemur*; quorſum incidentium quotcunque refractis unâ ſimulo perâ delineandis, adeóque refractionum ſymptomatis organicè pertentandis modum imprimìs exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorſim ad $v\gamma$ æqualem diametro (N G) circuli refringentis deſcribatur circulus $v\varpi\gamma$. item habeat $v\gamma$ ad $S\gamma$ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, conſtanter nuncupabo rationem I ad R) & ſuper diametro $S\gamma$ deſcribatur quoque circulus $SH\gamma$. Incidat jam radius quilibet M N P, cui conveniens deſignandus eſt refractus. ut hoc aſſequamur, circulo adpoſito à V adaptetur $v\varpi = NP$; & centro γ per ϖ deſcriptus circulus ſecet circulum $SH\gamma$ in H; connexáque γH circulum $v\varpi\gamma$ interſecet in ξ. demùm connexâ $v\xi$, circulo N P G accommodetur $NX = v\xi$; erit N X ipſius N P refractus. Etenim (ductis G P, G X) eſt $\gamma H . \gamma\xi :: (\gamma S \gamma v ::)\ I . R$. hoc eſt $\gamma\varpi . \gamma\xi :: I . R$. hoc eſt $GP . GX :: I . R$. cùm itaque ſint ipſæ G P, G X recti ſinus angulorum $GN\varpi$, G N X (quorum G N P eſt angulus incidentiæ) liquet propoſitum.

Fig. 109.

II. Ad ipſa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quaſi diſtantiam poſito, ſeu parallelos ad ſenſum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta A C Z, tum fiat $BZ . CZ :: I . R$; nec non dividatur C Z in F, ut ſit $FZ . FC :: I . R$; & centro F per Z deſcribatur circulus E G Z. his peractis, accipiatur jam quilibet ad A C parallelus M N P (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico ſi recta N C (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo E G Z protracta occurrat in G; &

in axe capiatur CK = CG; connectatúrque recta NK, fore NK ipſius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam eſt BZ.CZ :: (I.R ::) FZ.FC; erit permutando Fig. 109. BZ.FZ :: CZ.FC. dividendóque BF.FZ :: FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera ſcilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) ſimilia fore. quamobrem erit BG.GF :: GC.CF. ſeu permutatim BG.GC :: GF.CF. hoc eſt BG.GC :: FZ.CF :: I.R. verum in triangulis BCG, NCK eſt BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC :: NK.CK. quare erit quoque NK.CK :: I.R. ergo, *ſecundum generatim antehac oſtenſa, liquet NK ipſius MN refractum exiſtere.

** Lect. 3. numero.* 10.

Coroll. Adnotetur eſſe triangula BFG, GFC ſimilia; ac eſſe BG.CC :: I.R.; & ang. BGF = GCF; & eſſe BF, FG, FC ∺ &c.

III. Ex hoc (ſanè pulchro, perutilíque *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujuſmodi quotcunque refractos expeditiſſimè ſeu delineandi, ſeu computandi; tum ipſorum præcipua *ſymptomata* facilimè diſcernuntur ac demonſtrantur. qualia ſunt, quæ in ſubjectis exhibentur *Corollariis*.

IV. Patet hinc punctum Z eſſe limitem ultra quem (reſpectu centri) nullus axem interſecat refractus; ſeu perpendicularis ipſius AB (vel ei ſaltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z termi- Fig. 110. nari. quia nimirum eſt CZ $\sqsubset$ CG, vel CR.

V. Conſequitur etiam, ſi duorum incidentium MN, QR (quorum QR ſit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore Fig. 111. CK $\sqsubset$ CL. Etenim ſi rectæ NC, RC ad circulum refractarium (itâ circulum EGZ meritò ſubinde nominabimus) producantur, ut ipſum ſecent punctis G, H; liquet eſſe CG $\sqsubset$ CH; adeóque CK $\sqsubset$ CL. Hinc

VI. Ad eaſdem partes incidentium refracti ſeſe priùs interſecant quàm axem; (veluti puta refracti NK, RL ſeſe decuſſant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, ſi in primo caſu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y eſſe limitem refractionis

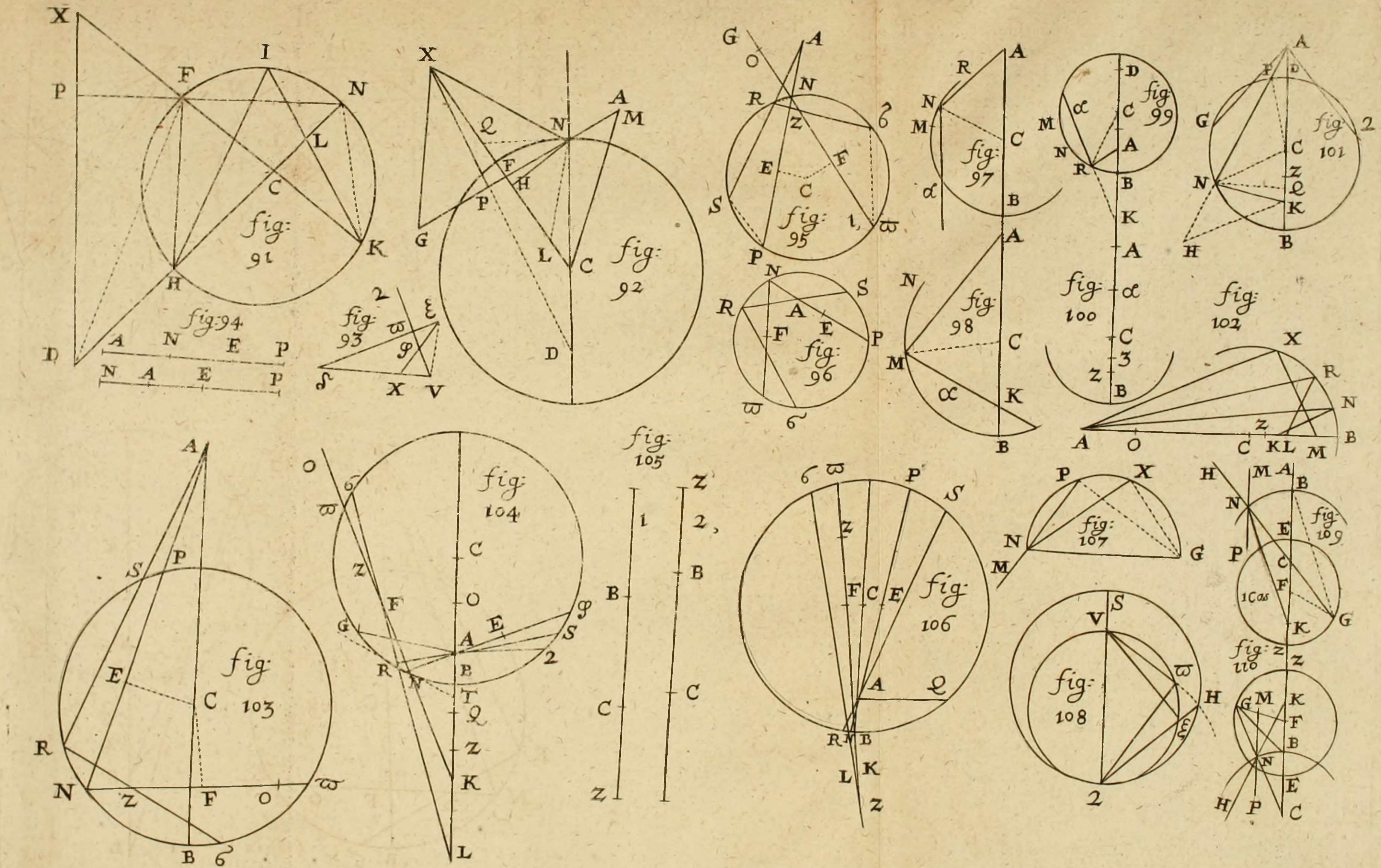


fig: 91
X
P
F
I
N
L
C
K
H
D
fig: 94
A N E P
N A E P
fig: 92
X
Q
N
A
M
F
H
P
G
L
C
D
fig: 93
2
ϖ
ε
φ
δ
X
V
fig: 95
G
A
O
N
R
Z
δ
E
F
C
S
P
ϖ
fig: 96
N
R
S
A
E
F
P
ϖ
6
fig: 97
R
A
N
M
C
α
B
fig: 98
A
N
C
M
α
K
B
fig: 99
D
C
α
M
A
N
R
B
K
fig: 100
A
α
C
3
Z
B
fig: 101
A
F
D
G
2
C
Z
N
Q
K
H
B
fig: 102
X
R
N
A
O
Z
C
K
L
M
B
fig: 103
A
P
S
E
C
R
N
Z
F
O
ϖ
B
6
fig: 104
O
6
ϖ
C
Z
F
O
G
E
φ
S
A
2
R
N
B
T
Q
Z
K
L
fig: 105
1
B
C
Z
Z
2
B
C
fig: 106
6
ϖ
P
S
Z
F
C
E
A
Q
R
B
L
K
Z
fig: 107
P
X
N
M
G
fig: 108
S
V
ϖ
H
ξ
2
fig: 109
H
M
A
B
N
E
P
C
F
G
1 Cas
K
fig: 110
Z
G
M
K
F
B
N
E
H
P
C

Opt pag 76

8

]

citeriorem: erit enim connexa V Y refractus obliquiſſimi radii, ceu T V, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in ſecundo caſu ſi recta C V I circulum E G Z tangat in I, & adſumatur C Y = C I, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa V Y refractus erit incidentis (puta V T) ad B C paralleli; qui certè cunctorum obliquiſſimus erit hujuſmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmiſſis) connexâ F I, ſit F I . C F :: I . R. hoc eſt ſinus rectus anguli F C I (vel anguli C V T) ad ſinum totum, ut I ad R; nullus ipſo T V obliquior medium B N V penetrabit; at ipſe quicunque talis repercutietur; velut φ ψ in φ ξ. Fig. 112. *Lect. 3. num. 7.

IX. Cæterùm hîc (tametſi præter ordinem non nihil, extráque ſuum locum) egregiam quandam & præſertim notabilem iſtius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interſeremus: Omnium à puncto B promanantium, & a circuli E G Z cavis partibus refractionem patentium (juxta caſus prænominatos reſpectivam) refracti per punctum C tranſibunt.

Nam ejuſmodi quilibet incidat radius B G, & (ſtantibus quæ præſtructa præmonſtratáque ſunt) triangula B G F, G C F ſimilia ſunt; angulúſque B G F par angulo G C F; itémque F G . C F :: I . R; eſt autem F G ad C F, *ut Sinus anguli* G C F *hoc eſt anguli B G F) ad Sinum anguli C G F. ergò Sinus anguli* B G F *(qui eſt angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* C G F ſe habet, ut I ad R. ergo C G c eſt refractus ipſius B G: Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujuſce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi ſe habeat ut I ad R; etiam reflexi per C tranſibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos caſus) è præcipuis in *Dioptrica* deſideratum, perquam utile; Superficies ſimpliciſſima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonſtrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypotheſin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diverſos refringentes circulos, iiſque competentes, modo præſtituto determinatos, refractarios adſumendo, rectæ C B, E Z, C E, C Z, C F eaſdem in uno, quas in altero quovis proportiones obſervant; id quod facilimè demonſtratur; & ſatis elu-

ceſcit

creſcit ex eo, quod earum omnium ad ſe proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro ſequentibus hæc adjungo *Lemmatia*.

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) ſe deinceps æqualiter excedentia; ſint etiam altera totidem M, N, O; & ſit $A . B :: M\ N$; ac $B, C :: N, O$; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica*. Nam ob $A . B :: M . N$. erit diviſim $A - B . B :: M - N . N$. item ob $B . C :: N . O$. erit per rationis converſionem $B . B - C :: N . N - O$. ergò erit ex æquo $A - B . B - C :: M - N . N - O$. itaque cùm ſit ex Hypotheſi $A - B = B - C$; erit etiam $M - N = N - O$: Q. E. D.

XII. 2. In circuli quadrante ZQ trium arcuum ZG, ZH, ZI Sinus recti $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$ æqualiter creſcant (ut nempe ſit $\alpha\beta = \beta\gamma$) dico fore $G\alpha - H\beta \sqsupset H\beta - I\gamma$.

Fig. 115. Nam ducatur ſubtenſa GI ipſam $H\beta$ ſecans, in X; & ſint XR, IS ad FQ parallelæ; patet ipſas GR, XS æquari hoc eſt fore $G\alpha - X\beta = X\beta - I\gamma$; unde liquidum eſt eſſe $G\alpha - H\beta \sqsupset H\beta - I\gamma$: Q. E. D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes FZX, $F\zeta\xi$; & ad FZ parallela ducatur recta quævis $LG\gamma$; circulos interſecans punctis G, γ; dico fore $FZ - LG \sqsubset F\zeta - L\gamma$. Fig. 116.

Nam connexa FG circulum $\zeta\gamma\xi$ producta ſecet in T; connectantúrque ſubtenſæ ZG, ζT (hæc ipſam $L\gamma$ ſecans in S) Patétque jam rectas ZG, ζT parallelas eſſe; adeóque quadrangulum $ZGS\zeta$ fore parallelogrammum; unde $GS = Z\zeta$; adeóque $F\zeta - LS = FZ - LG$. ergo $F\zeta - L\gamma \sqsupset FZ - LG$: Q. E. D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli MN, QR, VX, à ſe diſtantes æqualiter (hoc eſt ut ductis Nv, $R\varrho$, $X\xi$ ad axem AC perpendicularibus ſit $X\xi - R\varrho = R\varrho - Nv$) & ipſorum refracti cum axe conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concurſibus interjectum ſpatium OL majus ſpatio LK, quod à rectiorum occurſibus continetur. Fig. 117.

Nam ducantur NC, RC, XC circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$; & quoniam triangula $CX\xi$, $CF\gamma$ ſimilia ſunt; erit $X\xi . CX :: F\gamma . CF$. item ſimili de cauſa, eſt CR (CX).

$R\varrho :: CF . F\beta$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\varrho :: F\gamma . F\beta$. non diſpare ratione conſtabit eſſe $R\rho . N\nu :: F\beta . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\varrho$, NV ſe æqualiter excedant; *etiam tres $F\gamma$, $F\beta$, $F\alpha$ ſe æqualiter excedent; unde conſequetur eſſe $C\alpha - C\beta \sqsupset C\beta - C\gamma$; nec non eſſe *$\alpha G - \beta H \sqsupset \beta H - \gamma I$; adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc eſt $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc eſt denuò $LK \sqsupset OL$: Q.E.D.

*21 *hujus Lect.* *Hyp.*

*22 *huius Lect*

XV. Hinc apparet rectiùs illapſam refringenti lucem magìs inſpiſſari; verſúſque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus iſthic exeri; focúmque combuſtionis (ad ſolem) ibi verſari.

XVI. Conſectatur etiam radios (hujuſmodi ſaltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe ſuperficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ ſunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipſo readunari, ſeu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur viſibilis longinqui puncti ſpeciem oculo, in axe poſito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copioſiores affluunt; quibus ex cauſis imaginis poſitio dependet; ut jam ſæpiùs admonitum: — ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν αὖτις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν. cæterùm hâc defunctus curâ tantiſper reſpirabo. ||

LECT. XII.

I. *Parallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixus, præter alia præcipua ſymptomata, locum ultimè determinavi, quam iſti repræſentant, imaginis, oculo in axe conſtituto*. res jam poſtulat ut eandem definiamus oculi gratiâ ſecùs collocati. veruntamen unam priùs haud inutilem adnectam obſervationem, ad præcedentia ſpectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta NBR, $\nu\beta\rho$ latitudines (vel ſubtenſas) NR, $V\rho$ æquales habeant; quorum $V\beta\rho$ ad majorem pertineat circulum; hoc cùm potentiùs aduret, tum objectum viſibile clariùs atque diſtinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii ſint EGZ, $\epsilon\gamma\zeta$; horúmque centra F; φ; tum parallelorum punctis N, ν incidentium ſint refracti ND, $V\delta$; dico tum fore $DZ \sqsubset \delta\zeta$. || Ducantur enim rectæ NCG, $V\kappa\gamma$; híſque perpendiculares rectæ FL, $\varphi\lambda$. éſtque $CN.\nu\varpi :: CN.NP :: CF.FL$. & $\nu\varpi.\kappa\nu :: \varphi\lambda.\kappa\varphi$. ergò (rationes ſibi pares adjungendo) eſt $CN.\nu\varpi + \nu\varpi.\kappa\nu :: CF.FL + \varphi\lambda.\kappa\varphi$. hoc eſt $CN.\kappa\nu :: CF \times \varphi\lambda.FL \times \kappa\varphi$. eſt autem 23. 11 Lect. $CN.\kappa\nu :: CF.\kappa\varphi :: CF \times \varphi\lambda.\kappa\varphi \times \varphi\lambda$. quapropter erit $CF \times \varphi\lambda.FL \times \kappa\varphi :: CF \times \varphi\lambda.\kappa\varphi \times \varphi\lambda$; & idcirco $FL \times \kappa\varphi = \kappa\varphi \times \varphi\lambda$; indeque $FL = \varphi\lambda$. hinc conſequetur fore $CF - CL \sqsubset \kappa\varphi - \kappa\lambda$; nec non $FZ - LG \sqsubset \varphi\zeta - \lambda\gamma$; proindéque conjunctim $CZ - CG \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\gamma$; hoc eſt $CZ - CD \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\delta$; hoc eſt demum $DZ \sqsubset \delta\zeta$; exhinc lux ab arcu $\nu\beta\rho$ magìs conſtipata, (in ſpatium quippe reſtrictius $\delta\zeta$ coacta) violentiùs operabitur; & à fonte magìs ad punctum accedente promanare viſa punctum radians diſtinctiùs exhibebit; id quod inſtitutum fuit oſtendere; quo rei paſſim obſervatæ, nec exilis in perſpiciliorum conſtructione uſûs ratio conſtaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi reſpectu quomodocunque ſiti. quem in finem conficiendum venit imprimìs hujuſmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iſte verſatur:

III. Dato circulo refringente ; punctóque quovis X ; per punctum X ducatur recta, quæ ſit incidentis ad datam poſitione rectam C B parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe C B ; facillimè perficitur negotium ; etenim ſi fiat R . I : : C X . T ; & centro X intervallo ipſam T adæquante deſcribatur circulus refringentem interſecans in N ; è præmiſſis admodum patet connexum N K per N incidentis ad B C paralleli refractum eſſe ; quia ſcilicet eſt C X . X N : : C X . T : : R . I. Fig. 120.

IV. Verùm extra caſum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum eſt, aut pluſquam Solidum (ut ex analyſi non difficilè perſpiciatur) & certè viâ conſuetâ, per lineas vulgò receptas, constructu perquam arduum & operoſum ; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta ſit methodus ejuſmodi conſtructionem non unam moliendi, ægrè poſſim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum expoſcit ; ſuffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam ſibi peculiarem, punctatim facili negotio deſignabilem, ità conſtrui poſſit, ut unà ſuam naturam ac indolem prodat. modus ille ſic habet.

V. Connectatur recta C X ; fiátque C X . C V : : R . I ; & per punctum V indefinitè protendatur recta F G, datæ C B parallela ; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque C I exeant, rectam F G decuſſantes punctis H ; & centro X, intervallo rectas V H perpetuùm æquantè deſcripti circuli rectis C I occurrant punctis N ; per hujuſmodi puncta quævis linea tranſit, quam innuimus expoſiti *Problematis* Solutioni deſervituram ; ejus ſcilicet, & dati circuli refringentis interſectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipſi B C parallelam ; ſeu viciſſim hæc in illam. Sit enim talis interſectio quævis N ; & ducta N X ipſam B C ſecet in K ; & ſint N M, ac X T ad B C parallelæ. Eſtque tum C K . K N : : (T X . X N : : T X . V H : : C X . C V : :) R . I ; unde ſecundum oſtenſa liquet N X K refractum eſſe ipſius M N ; quod oportebat factum. Ità *Problema* δυσπόριστον utcunque licebit exequi, nec non ejuſce qualitatem intueri ; quot refracti per oculi centrum meent definire, ſingulóſque reipsâ deſignare ; quæ longiuſculum eſſet ſigillatim exponere. cùm autem eâtenus imaginis locus Fig. 121.

habeatur

habeatur determinatus; ſuccedit ut breviter etiam ipſiſſimum in ſingulo tali refracto punctum oſtendamus, ad quod illa conſiſtit. in cujus rei gratiam hoc quaſi *Lemma* præſternemus.

VI. In circulo A N B, cujus centrum C, ſint Semidiametro C A perpendiculares N E, R F; item Semidiametro C B ſint perpendiculares N G, X H; ſint autem C E, E F ipſis C G, G H proportionales; & arcus N R, N X indefinitè parvi; ſeu quaſi minimi dictâ conditione præditi; dicimus arcum N R ad arcum N X rationem habere conflatam è rationibus ipſarum C E ad C G, & N G ad N E; vel eſſe arc. $NR, NX :: CE \times NG . CG \times NE$. Nam per N ducatur V T tangens circulum, ipſiſque F R, H X occurrens punctis T, V. eſt itaque (propter Summam ex Hypotheſi parvitatem dictorum arcuum) arc $NR . CN :: NT . CN :: EF . EN$. item CN. arc $NX :: CN . NV :: NG . GH$. quapropter erit arc $NR . CN + CN$. arc $NX =$ ($EF . EN + NG . GH = EF . GH + NG\ EN =$) $CE . CG + NG . EN$. hoc eſt arc NR. arc $NX = CE . CG + NG . EN$: Q. E. D. (vel arc $NR . NX = CE \times NG . CG \times EN$.)

Fig. 122.

VII. Sit jam radii cujuſvis talis M N P, refringentem interſecantis punctis N, P, refractus $N\varpi$ (refringentem nempe denuò ſecans in ϖ) huic autem indefinitè vicinus (& quaſi proximus) adjaceat radius Q R S, cujus itidem refractus $R\sigma$ (refringenti nempe rurſus occurrens in σ), priorem $N\varpi$ decuſſans in Z; biſecentur autem ſubtenſæ N P, $N\varpi$ punctis G, E: Dico rationem N Z ad G Z componi è rationibus N G ad N E, & C E ad C G.

Fig. 123, 124.

Nam ducantur rectæ C E (hæc ipſam R S quoque ſecans in F) & C G; nec non C I ad $R\sigma$ perpendicularis; & in protracta C G ſumatur $CH = CI$; & per H ducatur X Y ad $N\varpi$ parallela, ſeu perpendicularis ad C H; unde eſt $XY = R\sigma$; & arc $NX = Y\varpi$; & arc $XY =$ arc $R\sigma$; adeóque arc $NR \pm: \sigma\varpi = 2$ arc NX. Eſtque prætereà $CG . CE :: R . I :: CI . CF :: CH . CF$; adeóque permutatim $CG . CH :: CE . CF$. ergò (juxta præcedentem) eſt arc. $NR . NX = NG . NE + CE . CG$. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum N R, S P, $\varpi\sigma$ exiquitatem, erit arc $NR . \varpi\sigma ::$ ſubtenſa $NR . \varpi\sigma :: NZ . Z\sigma :: NZ . Z\varpi$. ergò (inverſè componendo, vel dividendo, tum & conſequentes ſubduplando) arc NR. $\frac{\text{arc}\ NR \pm: \varpi\sigma}{2} :: NZ . \frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$. atqui velut modò dictum)

arc

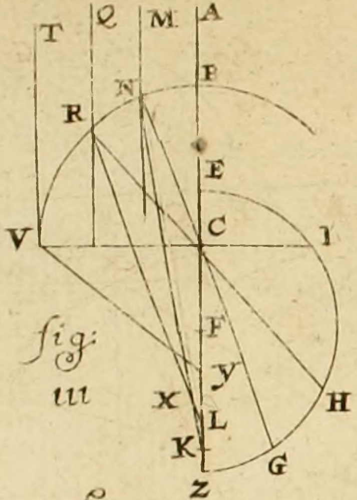


fig: 111
T
Q
M
A
P
N
R
E
C
V
I
F
y
X
L
K
H
G
Z

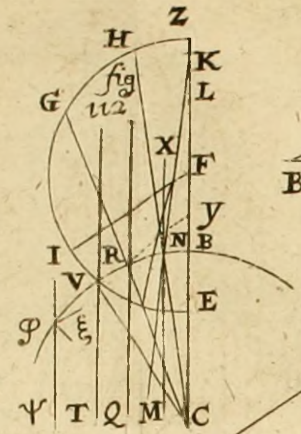


fig 112
Z
H
K
L
G
X
F
y
I
R
N
B
V
E
φ
ξ
Ψ
T
Q
M
C

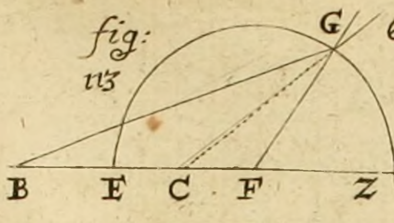


fig: 113

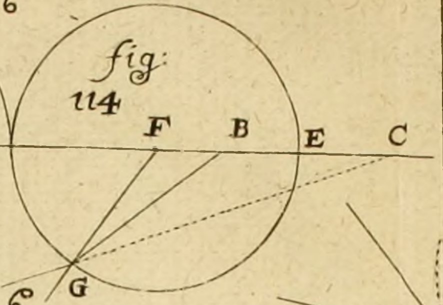


fig: 114

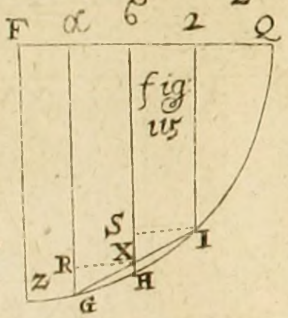


fig 115
F
α
6
2
Q
S
X
I
Z
R
G
H

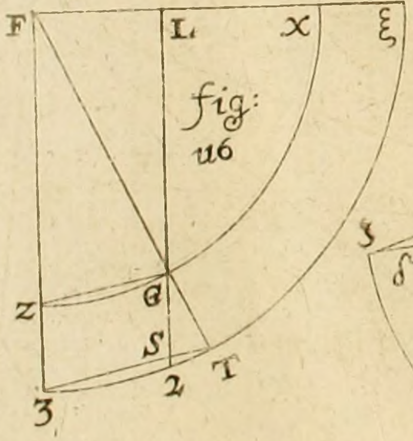


fig: 116
F
L
X
ξ
Z
G
S
2
T
3

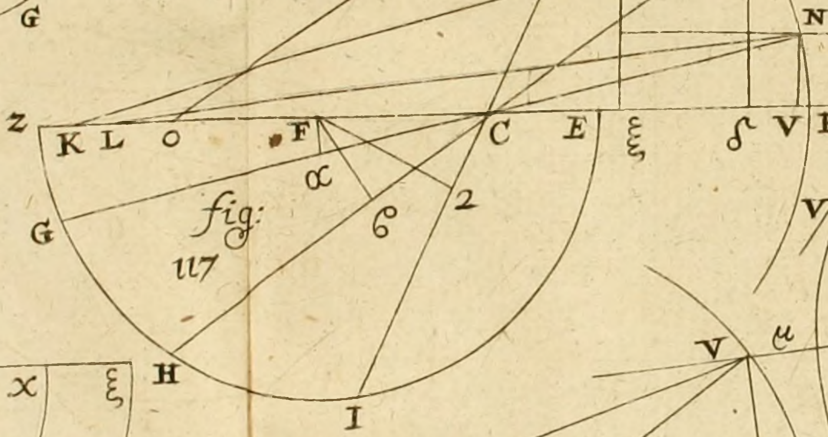


fig: 117
X
V
R
Q
N
M
Z
K
L
O
F
C
E
ξ
δ
V
B
α
6
2
G
H
I

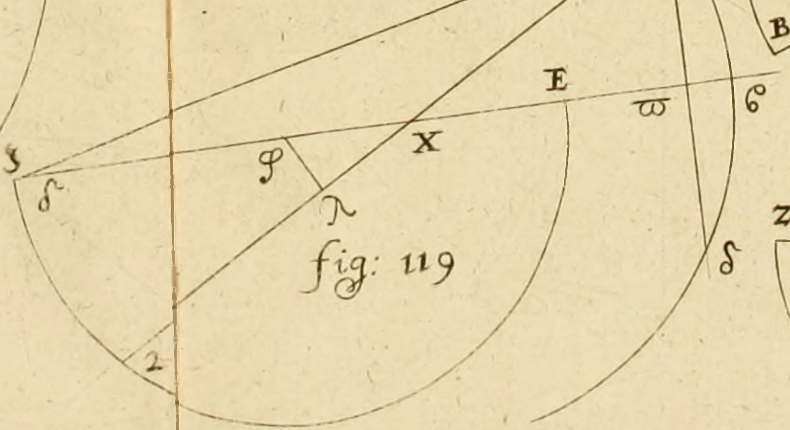


fig: 119
V
u
E
ω
6
X
δ
φ
λ
δ
2

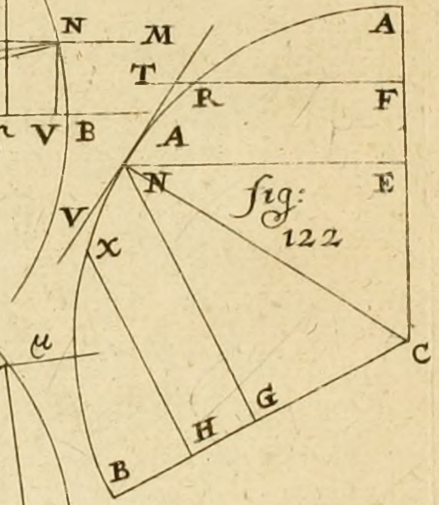


fig: 122
A
T
R
F
A
N
E
V
X
C
G
H
B

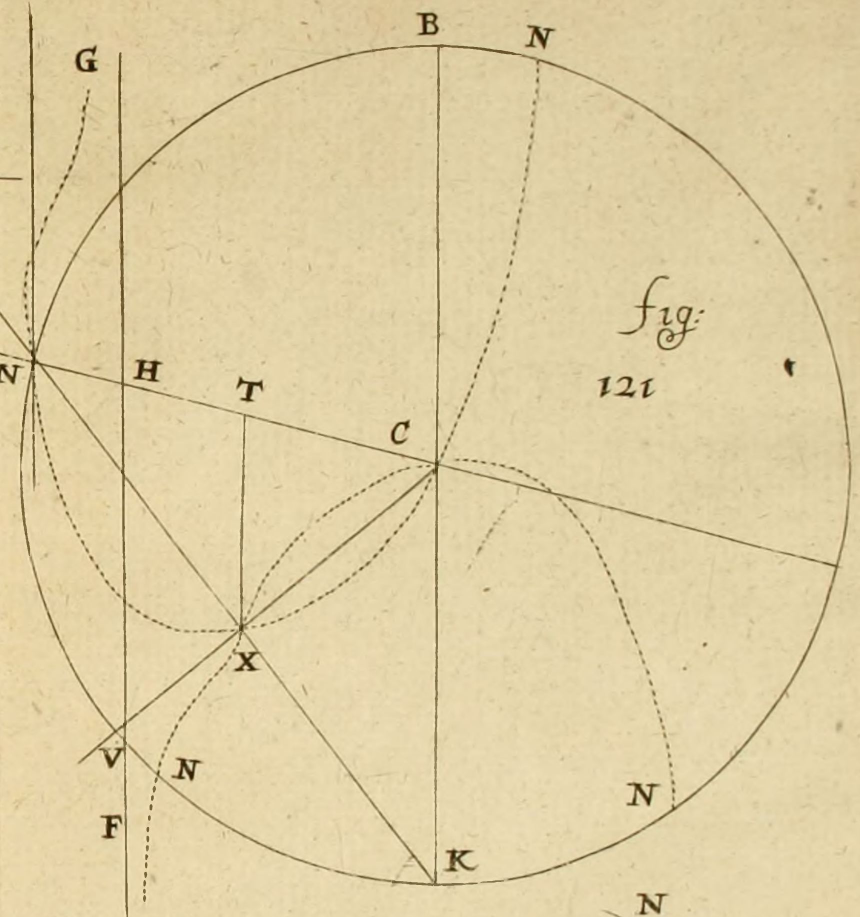


fig: 121
B
N
G
I
N
H
T
C
X
V
N
F
N
K

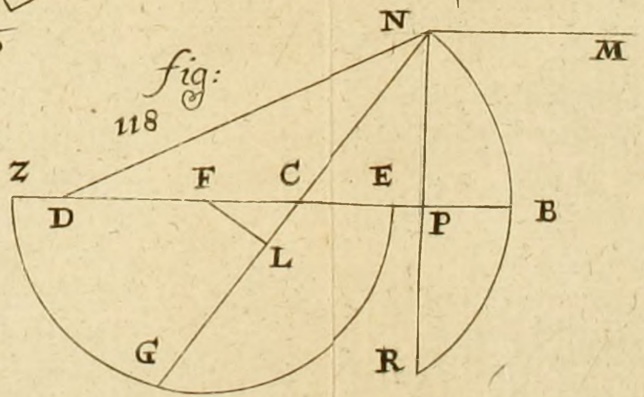


fig: 118
N
M
Z
F
C
E
D
P
B
L
G
R

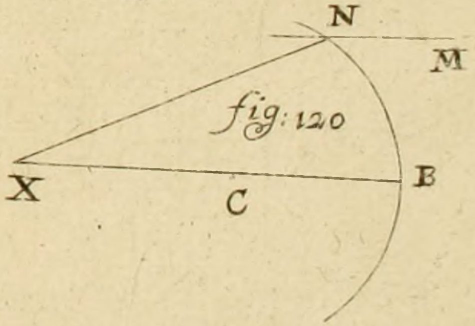


fig: 120

Opt pag 82

arc $\frac{NR \pm : \varpi\sigma}{2} = NX$; item eſt $\frac{NZ \pm : Z\varpi}{2} = GZ$. erit ergò arc Fig. 124.
NR.NX :: NZ . GZ . quapropter erit (juxta præcedentem) NZ.GZ = NG.NE + CE.CG.

VIII. Porrò liquet punctum Z eſſe locum imaginis, quem expetimus, oculo conſpicuæ in recta N ϖ conſtituto; utpote circa quod viciniorum ipſi NP radiorum refracti ipſam N ϖ interſecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura βαττολογεῖν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmiſſum*, deſignatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, ſecans ipſam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti Fig. 125.
nempe per N, E, G, C circuli ſubtenſæ GE inſiſtentes ambos) æquari; hoc eſt angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG ſimilia ſunt, unde NG.NE :: ZV.ZG. itaque. CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG. verùm (ob refractionem) eſt NK.KC :: I.R :: CE.CG; hoc eſt NZ.ZV :: CE.CG. eſt igitur CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG; hoc eſt CE.CG + NG.NE = NZ.ZG. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox oſtenſis. adeò liquet propoſitum.

X. Quin ſubnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut ſit NZ.ZK :: NGq.CGq. Etenim eſt NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq.

XI. Subjiciam & hoc è dictis conſectarium *Theorema:*

Fiat $\sqrt{3Rq} . \sqrt{Iq - Rq} :: CB . CQ$; ductáque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N; radii verò MN ad CB paralleli refractus ſit NK, circuli peripheriæ denuò occurrens in Z; dico punctum Z eſſe imaginem, qualem mox definivimus, oculo conſpicuam in ipſa NK ſito. Fig. 126.

Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob 3Rq.Iq — Rq :: CNq.NEq. hoc eſt 3CGq.CEq — CGq :: CNq.NEq; erit dividendo 4CGq

$-CEq.CEq-CGq::CNq-NEq.NEq::CEq.NEq$. quare permutando $4CGq-CEq.CEq::CEq-CGq.NEq$. (hoc eſt) $::NGq-NEq.NEq$. ergo componendo $4CGq.CEq::NGq.NEq$. & ideò $2CG.CE::NG.NE$. quare $2.1+CG.CE=NG.NE$. vel $2.1=NG.NE+CE.CG$. hoc eſt $NZ.GZ=NG.NE+CE.CG$. unde liquet, è mox antedictis, propoſitum.

XII. Ex iſta porrò conſtructione facilè colligitur, ſi fuerit $3Rq=Iq-Rq$ (hoc eſt ſi $2R=I$) adeóque $CQ=CB$; quòd hujuſmodi punctum Z non aliud erit ab ipſo D; ſeu perpendiculari ipſi A B debitam imaginem ad punctum D conſiſtere; eas vero quæ reliquis refractis conveniunt ejuſmodi imagines intra circulum omnes, vel ſupra peripheriam extare. quinetiam ſi fuerit $2R\sqsupset I$, adeoque $CB\sqsupset CQ$, patet nullius refracti imaginem in peripheria exiſtere, ſed omnes ſupra ipſam. Enim verò in his caſibus omnes refracti axem A D ſupra punctum D interſecant. verùm ſi fuerit $2R\sqsubset I$ (utique ſicut reverà quoad pleraſque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias uſu venit) utì reipsâ datur ejuſmodi punctum Z, in perepheria T D alicubi ſitum, ità facilè poterit iſto modo determinari.

XIII. Obſervetur porrò ſic definitum punctum Z circuli partem à D verſus T per radios quadranti B T incidentes illuſtratam terminare. Omnes enim ipſo M N obliquius incidentium refracti ipſam N Z ſupra Z verſus G decuſſabunt; adeóque ad partes Z D circulo impingent; item omnium ipſo M N rectiorum refracti ipſam N Z infra Z verſus K interſecabunt; & hinc etiam in arcum Z D cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Sluſio* monitum amicus mihi communicavit) potuiſſe *Carteſium* ſine tabularum confectione ſuum *Iridis* angulum determinare. nam aſſumpto arcu $DY=DZ$; angulum iſtum arcus Z Y metitur; poſito circulum propoſitum per aquei globi centrum tranſire. quod ità facilè conſtat. Radii cujuſvis diametro B C paralleli M N refractus N Z K reflectatur in Z F H; & Z F in F O refringatur; ſitque F L ad B D parallela; ſumatur etiam $DY=DZ$; & connectantur C Z, C Y; dico angulum L F O æquari angulo Z C Y. Nam imprimìs ob Z N, Z F æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum O F H angulo P N Z vel C K Z æquari. igitur ang. $HFL-HFO=$ ang $FIC-CKZ=$ ang

$KIZ - CKZ =$ ang $NZI - 2$ ang $CKZ = 2$ ang $NZC - 2$ ang $CKZ = 2$ ang. $ZCD = ZCY$. eſt igitur ang. $OFL =$ ang ZCY. Cùm itaque ſit in ſuperiore Hypotheſi punctum Z umbræ luciſque confinium, manifeſtè liquet propoſitum.

XV. Subnotetur autem, ſi medium inflectens ſit aqueum, arcum Z Y eſſe partem circuli totam (poſticam ſcilicet) illuminatam; tangentis enim S T refractus, puta T V, nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. aſt in denſioribus mediis, velut in vitro, ſecùs accidere poteſt; ſiquidem in eo tangentis refractus, Fig. 128. puta T X, ultra terminum Y (modo prædicto deſignatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu Z Y amplior evadit; tangentium quippe refractis circumſcripta. Viderit igitur excellentiſſimus vir; an univerſim conſtet (id quod ipſe niſi fallor innuere videbatur) ex obſervata partis illuminatæ quantitate, *Iridis angulum, etiam juxta Carteſianas Hypotheſes, recte determinari*. Nam ſumendo arcum $DR = DX$; ad punctum quidem R pertinget illuſtratio; neque tamen ulla lux quadranti B T incidens à parte Z R (ſed illa tantùm quæ ad partes Z D cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes ſitos, hoc eſt quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque diſterminat.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici poſſit, illâ fortè veriſimilior, quam ipſe *Carteſius* aſſignavit. quid enim ſi dixero peripheriæ Z V impingentem lucem, & verſus O inflexam magìs apparere; primò, quia ſpiſſior eſt, ac à radiorum geminâ diffuſione conſtat, ab utraque puncti N parte in arcum Z V refractorum; tum ſecundò, quoniam obliquiùs ipſi Z V incidit, adeóque faciliùs & copioſiùs indè quam aliunde verſus partes O retorquetur? Et cum præſertim circa punctum Z acutiùs radii coëant, neque non incurrant obliquius; quidni propterea vividior exindè reſultet apparentia? Verùm hæc παρεκβατικῶς. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid ſi de illis (etſi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* eſt quod lucem copioſam, pariter ubique ſpiſſam, circumfundit. Talia fermè ſunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præſertim, quæ multas ſuperficieculas, in omne latus obverſas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida ſemper alba videntur;

Quia corpus bene terſum luci Splendidæ expoſitum albeſcit; Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli*, *Folia*, *Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore conſtricta accenſeri poſſent.

Nigrum eſt, quod lucem minimè, vel parciſſimè refundit. talia plerunque ſunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem abſorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua*, *Vitrum*, *Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, caleſiunt, comburuntur; Quòd longiùs diſſita (quorum ſenſim intercipitur, & amittitur lux) obſcuriora videntur.

e Lat. Fig. 128. *Rubrum eſt*, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac ſolito magìs conſtipatam, aſt interſtitiis umbroſis diremptam, & interruptam. talia concipi poſſunt corpora, multas intra ſe quaſi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Sphærulis*, tranſmiſſam lucem ad totidem *focos* cogentibus, conſtans). Argumento ſit, Quòd à *Speculis*, & *vitris uſtoriis* collecta lux rubeſcit; Quòd corpora denſa ignita (quippe quorum cellæ luce ſpiſsâ referciuntur) rubra videntur; Quod roſcida nubes Soli (matutino, vel veſpertino) expoſita rubet; Quòd eroſio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortaſſe pertinet, quòd compreſſa lux languidiùs emicat.

Cæruleum eſt quod lucem raram, aut impetu ſegniore concitatam emittit. talia Videntur eſſe corpora, quæ particulis conſtant albis ac atris alternatim diſpoſitis; ſed & hunc ſubinde colorem oſtentant candida maligniùs illuſtrata. Exemplo ſint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuſcula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, ſale candido nimirum & humore pellucido conſtans; Umbra corporis cujuſvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta ſeu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

è Lat. Fig. 128. *Viride* cæruleo perquàm agnatum eſt. *Diſcrimen* explorent ſagaciores; ego non auſim ariolari.

Cæterum reliqua colorata ex iſtis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioſo, rubríque nonnihillo interſperſo; *purpureum* ex multo cæruleo, rubríque tantillo, &c. Verùm ſufficiat hâctenus, iſta ſupra captum noſtrum poſita Scrutantes; nos illis, qui αἰτιολογίας *Phyſicas* moroſiùs excipiunt, deridendos propinaſſe.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum eſt; aſt interpoſitâ morâ, nè vix exorſi cogamur abrumpere. ||

Lect. XIII.

I. *Tranſactis iis quæ refractioni conveniunt iſti, quam ad circuli peripheriam ſubeunt radii ſibimet paralleli; quid iis obvenit proximè diſpiciendum venit, qui a puncto quempiam ſenſibiliter divergentes itidem circulo ſe objiciunt refringendos.* cum autem in hac Hypotheſi multa reperiatur caſuum varietus è pluribus cauſis oriunda (nedum enim à mediorum ſpecie differentium ordine, vel ſitu verſus ſe diverſo; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obverſa; ſed ab ipſius quoque radiantis magìs aut minùs à refringente ſemoti poſitione concluſionum emergit nonnulla diſcrepantia) nobis incumbet ita rem, quâ poſſumus, moderari, ſimul ut cùm ex abſtractione nimia proveniens confuſio, tum è repetitione faſtidium aliquouſque devitentur. id autem non alias, opinor, commodiùs aſſequemur quàm imprimìs generalia quædam attingendo, cuidam uni caſui (illi nempe, ubi $I \sqsubset R$, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut ſatìs facilè poſſint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla ſingulis congruentia ſubnotando. ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utraſque partes indefinitè; Fig. 129.
tum cujuſvis incidentis AN ſit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compoſitas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur oſtenſum) $I.R :: NK.NH = NK.NA + NA.NH = NK.NA +$ 3 *Lect. num.* 9.
$AC.CK$: Q.E.D.

III. Hinc ſi fuerit $CA.CR :: I.R.$ erit $CK.CR :: NK.NA.$

Nam erit tum $CA.CR = CA.CK + NK.NA$. unde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit $CK.CA + CA.CR = CA.CK + CK.CA + NK.NA$. hoc eſt $CK.CR :: NK.NA$.

Fig. 130, 131. Notetur in figuris ſequentibus eſſe perpetuo $CA.CR :: I.R$. quod ſemel, brevitatis cauſâ, monitum eſto.

Fig. 129. IV. Hinc conſectatur; primò; Si fuerit $AN \sqsubset CR$, quòd refractus $N\alpha$ cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit $CK.AN \sqsupset CK.CR :: NK.AN$. adeóque $CK \sqsupset NK$.

Fig. 130. V. Secundò; ſi fuerit $AN = CR$, refractus $N\alpha$ ad AC parallelus erit.

Nam ſit NH ad AC parallela. quum itaque ſit $CA.AN ::$ $(CA.CR ::)$ $I.R$; erit AN ipſius HN refractus. ergò viciſſim NH ipſius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò; Si fuerit $AN \sqsupset CR$, refractus $N\alpha$ cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc $CK.AN \sqsubset CK.CR :: NK.AN$. ac indè $CK \sqsubset NK$.

VII. Hinc clarum eſt; Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos verſus AC procurrentes convergere. erit enim tunc ſemper $AN \sqsubset CR$.

VIII. Subnotetur autem ſi fuerit ſaltem $AB = CR$; axi propiores radios in ſenſibilem paralleliſmum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit $AT \sqsupset CR$; manifeſtum eſt omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere. tunc enim ſemper eſt $AN \sqsupset CR$.

X. Clarum eſt quoque, ſi $AN = CR$, omnes arcui BN incidentium refractos retro productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorſum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in caſu, propoſiti maximè contrario (quum nempe $I \sqsupset R$; & radii concavis incidunt partibus) adſimilis contingat diverſitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si fuerit $AN \sqsubset CR$, refractus $N\alpha$ cum AC retrò tractus conveniet. Fig. 132.

Nam $CK \sqsupset NK$. (ut in priore caſu).

2. Etiam hîc ſi $AN = CR$, refractus $N\alpha$ ſit ipſi AC parallelus.

Nam erit $CK = NK$. quod in hoc caſu niſi K infinitè diſtet contingere nequit.

3. Si $AN \sqsupset CR$; refractus $N\alpha$ prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hîc $CK \sqsubset NK$.

4. Si $AB \sqsupset CR$; omnes refracti directè progredientes ad AC convergunt. Erit enim quivis incidens $AN \sqsupset CR$. Fig. 133.

5. Quum $AN = CR$, evidens eſt omnes arcui BN incidentes retrorſum verſus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorſum verſus CB refringi.

XII. Hinc apparet ſub iſtis duobus generalibus caſibus tres à diverſo puncti radiantis intervallo ſubnaſcentes ſpeciales caſus comprehendi; nempe vel omnes ab axe poſt refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipſum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ ſubnotâſſe diſcrimina videbatur operæ pretium ac determinâſſe. Subdimus etiam quoad reliquos generales caſus ſimpliciùs ſeſe rem habere; ſcilicet eodem ſemper modo: Omnes enim ad cavum denſius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo rariori impungunt; id quod è generaliſſimis refractionum legibus immediatè ſequitur, & è ſimplice ſecundum illas linearum ductu diluceſcit. His admonitis in orbitam regreſſi pergimus. Fig. 134, 135, 136.

XIII. E præmiſſo Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum deſignare, qui per hoc ipſum tranſeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut ſit $KG . AG :: CK . CR$. item fiat $GF . FA :: CK . CR$ ($:: KG . AG$). tum centro F, intervallo FG deſcribatur circulus refringentem interſecans ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus. *Lect.* 10. *Num.* 25. Fig. 137.

Nam ducatur FN; & ob $KG . AG :: GF . FA$. erit permutatim $KG . GF :: AG . FA$. dividendóque $KF . GF :: GF . FA$. hoc eſt $KF . FN :: FN . FA$. quare triangula KFN, NFA

aſſimilantur. unde NK.KF :: AN.NF. ſeu permutando NK.
Fig. 137. AN :: KF.NF. erat autem prius KF.NF :: GF.FA :: CK.CR. eſt igitur NK.AN :: CK.CR. unde (juxta dictum Theorema) conſtat factum.

XIV. Ad conſtructionem iſtam advertentes animum, hujuſmodi facilè *Conſectaria* deducetis:

1. Si circulus GNH *refringentem* contingat ad H; ipſius AH (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipſius K partes (ultra nempe vel citra K reſpectu centri, pro diverſitate caſuum ab ipſius A poſitione reſultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* conſtructionem reſpuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus GNH *refringenti* coïncidat (id quod facilè concipi poteſt, & in aliquo reverà caſu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia conſtructionem iſtam conſectantur ſolerter expanſem; quorum ſaltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs oſtendi; velut hoc imprimìs palmarium.

XV. Si fuerit AB.CR :: BZ.CZ; dico punctum Z eſſe limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim interſecat; ſeu perpendicularis ipſius AB refractum in Z terminari.

Nam cujuſvis incidentis AN refractus axi occurrat in K, erit ideò CK.CR :: NK.NA. ergò quum ſit CR.CZ :: AB.BZ; erit CK.CR + CR.CZ = NK.NA + AB.BZ.

Fig. 138. 1. Eſt autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K ſunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) BK $\sqsubset$ NK, & AB $\sqsupset$ AN; adeóque BK.AB $\sqsubset$ NK.NA. ergo CK.CR + CR.CZ $\sqsupset$ BK.AB + AB.BZ. hoc eſt CK.CZ $\sqsupset$ BK.BZ. vel inverſè permutando BK.CK $\sqsubset$ BZ.CZ. dividendóque BC.CK $\sqsubset$ BC.CZ. ergò CK $\sqsupset$ CZ; adeóque punctum K ſupra Z exiſtit, verſus centrum; quod erat propoſitum oſtendere.

Fig. 139. 2. In ſecundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras ſupra punctum A partes à centro averſas cadunt) connectatur ſubtenſa BN, & ducatur AS ad KN parallela; hæc ſecabit angulum BAN, majorem ipſo BKN, vel BAS; & cùm angulus ABN ſit obtuſus, erit AN $\sqsubset$ AS. adeóque KN.AN $\sqsupset$ KN.AS :: KB.AB. erit etiam hîc igitur (ut ſupra) CK.CZ $\sqsupset$ BK.BZ. vel permutatim CK.BK

$\sqsupset$ CZ.BZ. dividendóque CB.BK $\sqsupset$ CB.BZ. adeóque BK $\sqsubset$ BZ; hoc eſt punctum K magìs quàm Z à centro elongatur.

3. Haud diſſimilis in aliis caſibus erìt *Demonſtratio*; ut in hoc, ubi I $\sqsupset$ R, ad convexas; eſt enim hìc (ut in præcedente) KB.AB $\sqsupset$ KN.AN. adeóque (ſupra monſtratis inſiſtendo) CK.CZ $\sqsubset$ KB.BZ. vel permutando CK.KB $\sqsubset$ CZ.BZ. dividendóque CB.KB $\sqsubset$ CB.BZ. unde KB $\sqsupset$ BZ. adeóque punctum K centro ſemper vicinius eſt quàm Z. Fig. 140.

XVI. Hæc autem cùm, modo ſuo mutatis mutandis, ad omnes caſus transferri poſſint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc eſt apparentia radiantium punctorum A loca, reſpectu oculi centrum habentis in axe AC ſitum; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hìc in duobus caſibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit obſervandum cùm ſit CB = CR, omnes refractos in ipſo puncto Z (ut ſuprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob AB.BC :: AB.CR :: BZ.CZ. erit dividendo AC.BC :: BC.CZ. quapropter ad punctum quodvis N adſumptum connexis AN, ZN, erit ZN.AN :: (CZ.CN ::) CZ.CR. unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam ſi fuerit AB = CR, conſequetur punctum Z à centro infinitè diſtare; quia nempe tum ob AB.CR :: BZ.CZ, erit BZ = CZ; id quod fieri nequit, niſi punctum Z ità elongetur infinitè. Fig. 141.

XIX. *Conſectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites ſint puncta Z, ζ, erit AC.AB + BZ.CZ = αC.αB + Bζ.Cζ. Fig. 142, 143.

Nam è præmiſſis facilè conſtat eſſe

$$\left.\begin{array}{l}\text{tam } AC.AB+BZ.CZ=\\ \text{quam } \alpha C.\alpha B+B\zeta.C\zeta=\end{array}\right\}I.R.$$

XX. Unde Cζ $\sqsubset$ CZ. Nam ob BC.AB $\sqsupset$ BC.αB. componendóque AC.AB $\sqsupset$ αC.αB. erit BZ.CZ $\sqsubset$ Bζ.Cζ. dividendóque BC.CZ $\sqsubset$ BC.Cζ. adeóque Cζ $\sqsubset$ CZ.

Fig. 144. XXI. Imò univerſim ſi radii quivis A F, $\alpha\phi$ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, híſque conveniant refracti F L, $\phi\lambda$, erit $C\lambda \sqsubset CL$. id quod hoc modo non inelegantèr oſtenditur. Ducatur recta B X cum B C angulum efficiens parem angulo refracto ad poſitam inclinationem pertinenti; perque puncta F, ϕ; & centrum C tranſeuntes rectæ ipſi B X occurant punctis P, ϖ. tum quoniam triangula F C L, B C P æquiangula ſunt (angulus enim C B P angulo C F L ex conſtructione par eſt, & ang. B C P verticali ſuo F C L æquatur) nec non latus C B lateri C F æquatur, erit $CP = CL$. Simili planè diſcurſu eſt $C\varpi = C\lambda$. Porrò, quia $C\phi$ ad $C\alpha$ (hoc eſt Sinus anguli $C\alpha\phi$ ad Sinum anguli $C\phi\alpha$) majorem rationem habet, quàm C F ad C A (hoc eſt quàm Sinus anguli C A F ad Sinum anguli A F C, vel æqualis anguli $C\phi\alpha$) liquet angulum $C\alpha\phi$ majorem eſſe angulo C A F, adeóque reliquum $\alpha C\phi$ minorem eſſe reliquo A C F; vel angulum P C B angulo ϖCB. unde liquet eſſe $C\varpi$ majorem quàm C P; hoc eſt $C\lambda$ majorem eſſe quàm C L: Quod E. D.

Coroll. Vides arcum B F majorem eſſe arcu Bϕ.

Notes etiam omnes ejuſdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ B X promptiſſimè deſignari. ſed hæc an πρὸ ἔργου fuerint neſcio.

Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo denſiori incidentium radiorum A M, A N (quorum A N ſit obliquior) refracti M K, N L axem ad eaſdem partes, directè pergentes, ſecent, iſte ad K, hic ad L; dico fore C K majorem quàm C L.

Nam connexis C N, K N; & ductâ L H ad K N parallelâ; quoniam, è præmiſſis, eſt $CK . CR :: MK . MA$. & $CR . CL :: NA . NL$. erit $CK . CK + CR . CL = MK . MA + NA . NL$. eſt autem $NK . NA \sqsupset MK . MA$ (quia $NK \sqsupset MK$, & $NA \sqsubset MA$) ergo $CK . CR + CR . CL \sqsubset NK . NA + NA . NL$. hoc eſt $CK . CL \sqsubset NK . NL$. hoc eſt $NK . HL . \sqsubset NK . NL$. quapropter eſt $LH \sqsupset NL$. eſt autem angulus L C N obtuſus; ergo recta L H angulum C L N ſecat; ac angulus L H C interno L N C major eſt; hoc eſt angulus K N C angulo L N C major eſt. unde liquidò patet fore $CK \sqsubset CL$.

Coroll. $CK . CL = MK . MA + NA . NL$.

XXIII. Hinc, ejuſmodi omnes refracti ſeipſos priùs quàm axem interſecant, velut ad X. || Hoc ſpeciminis loco pro caſu, qui præ manibus.

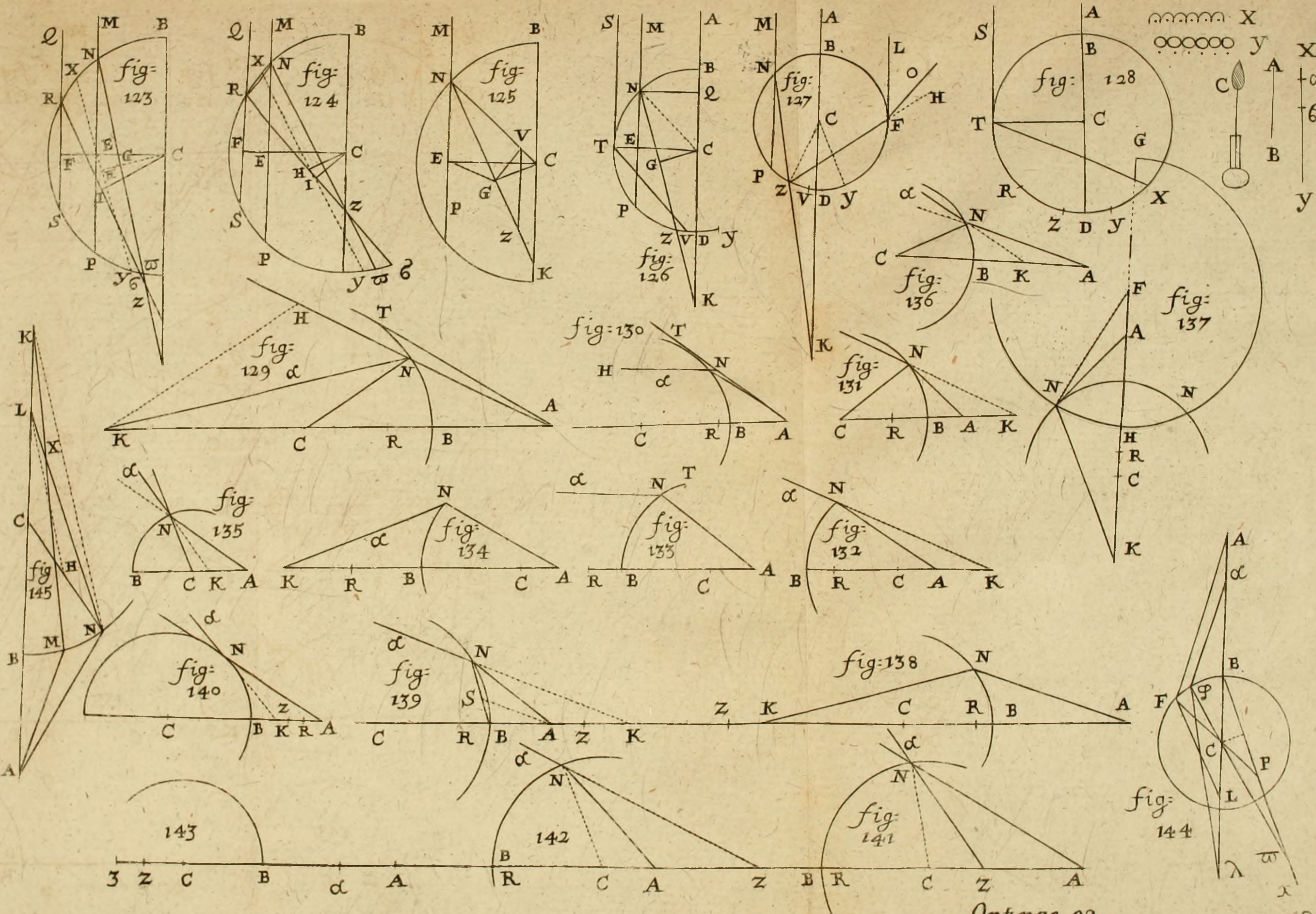


fig: 123
Q M B N X R E F G C H I S P y 6 ϖ z
fig: 124
Q M B R X N F E C H I S P z y ϖ 6
fig: 125
M B N V E C G P z K
fig: 126
S M A B N Q T E C G P Z V D y K
fig: 127
M A B L N O H C F P Z V D y K
fig: 128
S A B T C G R X Z D y
X y X A α C 6 B y
fig: 129
H T α N K C R B A K L
fig: 130
T N H α C R B A
fig: 131
N C R B A K
fig: 136
α N C B K A
fig: 137
F A N N N H R C K
fig: 135
α N B C K A
fig: 134
N α K R B C A
fig: 133
α N T R B C A
fig: 132
α N B R C A K
fig: 145
K L X C H B M N A
fig: 140
α N C B K R A z
fig: 139
α N S C R B A Z K
fig: 138
Z K C R B A N
fig: 144
A α B F φ C P L λ ϖ x
143
3 Z C B α A
142
α N B R C A Z
fig: 141
α N B R C Z A

Opt pag 92

10

manibus. propter alios qui ſimilia volet, ipſe viderit, & ſibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò ſcilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè caſibus *intricatiſſimum Problema* (cujúſque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compenſabit) quo jubetur per datum punctum tranſeuntem refractum deſignare. poſitione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS ſibi quàm proximorum concipiantur refracti Nϖ, Rσ ſeſe puncto Z decuſſantes; biſecentúrque ſubtenſæ NP, Nϖ punctis E, G; (à rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc eſt I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad Rσ perpendiculares; inque productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI, & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad Nϖ parallela. Jam eſt AP. AN :: arc PS. arc NR (ob ſumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm: AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm: \text{arc. } NR}{2}$. arc NR. hoc eſt AE. AN :: arc NT. arc NR. item eſt NZ. Zϖ :: arc NR. arc $\varpi\sigma$. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \mp: \varpi\sigma}{2}$. *hoc eſt NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, eſt AE. AN + NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem eſt CE. CG :: (I. R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonſtrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares ſubducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propoſitum fuit oſtendere.

* Lect. 9. Num. 11.

* 12 Lect. Num. 6.

XXV. Hinc, ſi fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.

unde Problematis conſtructio, ſeu puncti Z dererminatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipſo, concinnéque demonſtratam) conſtructionem: Duc N R incidenti A N perpendicularem, & ſecantem axin in R. Fac N P . N ϖ : : N R . T . duc N Q refracto N K perpendicularem, & æqualem ipſi T; denique jungatur Q C; hæc producta ſecabit N K in foco quæſito Z.

XXVII. Hujuſmodi verò punctum Z eſſe locum ipſiſſimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipſa N ϖ conſtituto, ſæpiùs expoſitæ rationes manifeſtant.

* In Num. 25. XXVIII. Attendenti porrò conſtabit, ſiquidem fuerit *N G ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo diſtabit; ſeu proximi radio N ϖ refracti ipſi N ϖ paralleli erunt; ſin ratio N G ad M ſit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z exiſtet infra G, vel in N G antrorſum protracta; verùm denuò ſi N G ⊐ M, quod punctum Z ſupra N, vel in N G retrò tractâ verſatur. Hæc ſuffecerit innuiſſe. Hinc etiam poſticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque poſſit determinari. ſed ad locum Solidum res ſpectat, ipsámque proinde miſſam facio.

Fig. 148. XXIX. Inſeremus autem hîc *Phænomeni* cujuſdam ſatìs obvii, quódque nonnullis forſan (*utpote communibus Opticæ decretis apparenter adverſum*) mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè diſtantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem M B N (ab axe A B biſectum) imago, ſeu focus Z; & per Z, ad ipſam A Z perpendicularis traducta concipiatur linea X Y. porrò, deſumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum verſus) jacere; ductis itaque rectis E M, E N, harum refracti adhuc altiùs ſe interſecant, puta ad K; productæque M K, N K lineam X Y ſecent punctis O, P. quinetiam ulteriùs accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum F M, F N refracti ſint M L, N L; lineæ X Y occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifeſtum eſt intervallum R S ipſo O P majus eſſe. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & ſtellæ fixæ) quæ propter exiguitatem ſuam apparentem punctorum ad inſtar haberi poſſunt) quò à diſtinctæ viſionis loco longiùs amovetur, eò (contra quàm in aliis

viſibilibus obvenit) majus apparet. Nam ſi arcus M N B oculi ſuperficiem repræſentet, (*pupilli amplitudini reſpondentem*) linea X Y fundum oculi, A locum diſtinctæ viſionis ; ejuſmodi lucens ad A poſitum ſatìs anguſtum circa Z ſpatium illuſtrabit ; ad E verò conſtitutum, validè radios vibrans, totum coruſcatione ſuâ ſpatium O P afficiet ; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum R S percellet, indéque grandiorem ſui ſpeciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter ſe habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam ſui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eo lubentius hanc, adeò perſpicuam, hujuſmodi *Phænomenων* aſſignamus rationem, quoniam in eorum reddendis cauſis ità titubat magnus ille *Galilæus*, neſcio quos, ex refractionibus, reflectionibúsve quibuſdam commentitiis oriundos, aſcititios ſuggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam ſimplicem circularem claudemus*, quam utcunque quàm pauciſſimis ità complexi ſumus, ut præcipua ſaltem (quæ videbantur) & notatu digniora perſtrinxerimus, prius autem *Catoptricam circularem* ; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum inſtituto noſtro viſum eſt congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propoſitum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præſertim ſectiones, haud diſſimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum ſatìs ſupérque commoratus ſim ; & præter ea quæ circa conicas ſectiones à nobis pridem inſinuata ſunt (quæ & ab aliis luculentè tractata proſtant) reliqua non ità magnum uſum ſpondeant ; contentus haſce primarias, in uſu maximè poſitas, & uſui præſertim accommodatas ſuperficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum ſcirem, excuſſiſſe ; cæteras omninò miſſas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones iſtas, quos pluribus ſucceſſivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque conſtitutis aut compoſitis, incidentes ſubeunt radii ; quæ conveniunt illis Symptomata, poſſunt ea de præmiſſis elici ; quorum certè præcipuum eſt, quod apparentis puncti locum reſpicit ab inflectionibus ad iſtas ſuperficies factis reſultantem ; in hoc enim indagando, determinandóque potiſſimùm hæ diſquiſitiones verſantur ; Hunc igitur ſaltem definitum exhibebimus, idque ſatìs commodè, ex uno quodam Theoremate, ſeu regula generali ; cui exempla quædam, communis uſûs in gratiam ſelecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præſertim comparata, ſubjungemus. Iſta verò, nè jam tædio Sinus, ſequenti reſervamus.

LECT. XIV.

I. *SUb præcedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis ſtipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus reſultantes, imagines dignoſcantur. illam nunc exhibemus quàm ſimplicime conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A ſpeciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut ſecùs diſpoſitis) conſtans; tum puncti A reſpectu oculi in recta B E poſiti, & ex inflectione ad ſuperficiem B reſultans (è præmiſſis utique deſignabilis) imago ſit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) reſpectu oculi in recta E F conſtituti, & ab inflectione ad ſuperficiem E emergens imago ſit Y; demùm puncti Y (tanquam in ſuperficiem F radiantis) reſpectu oculi in F O collocati ſit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque ſecùs quotcunque fuerint inflectiones ſeſe res habebit; enimverò ſemper ex illa tali poſtrema inflectione reſultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è conſtructione ſatìs apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipſi A B incidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipſum F X interſecare. vel ità rem collegeris: punctum Z eſt puncti A imago; & punctum Y ipſius Z; denuóque punctum X ipſius Y; itaque punctum X ipſius A imago erit, qualem nempe res hìc fert, remota. Strictiore longiuſculo diſcurſu poſſet hoc comprobari, ſed quorſum rem ſatìs claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, ſeu è præmiſſis deducta conſectaria ſubnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis proponuntur deſignandæ, oculum reſpicere Centrum habentem in ipſo radiationis axe (qualis eſt recta B D) conſtitutum. item diverſarum ſuperficierum ac radiationum axes ſibimet in directum poni. præſumatur etiam in refractionibus ex aëre factis ad vitrum fore I. R : : 5 . 3; ad aquam verò fore I. R : : 4 . 3. (hæ nempe rationes veris probè congruæ deprehenduntur) ; addo, confuſionis evitandæ causâ ſymbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò denſius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appoſitis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum poſterioris; & B verticem anterioris, D verticem poſterioris; denuò deſignat Y locum imaginis quæſitam.

Hiſce præmonitis, primum de longinquo radiantium, ſeu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, ſic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat $I - R . R :: DK . DY$.

In Vitro eſt $DY = \frac{3}{2} KD$.

In Aqua eſt $DY = 3 KD$.

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\left\{ \begin{array}{l} I - R . I :: BC . BZ ; \; \& \\ I . R :: DZ . DY . \end{array} \right.$

In Vitro $DY = \frac{3}{2} BC - \frac{3}{5} BD$.

In Aqua $DY = 3 BC - \frac{3}{4} BD$.

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\left\{ \begin{array}{l} I - R . I :: BC . BZ ; \; \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY . \end{array} \right.$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*

Fiat $2 I - 2 R . I :: CD . CY$.

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo convexam.*

Fiat $I - R . I :: BC . BZ$; &

Fig. 152, 153. 1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R}KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & cape DY ad partes lentis verſus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & ſit inſuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R}KZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & cape DY ad partes lentis verſus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R}KZ$, imago Y infinitè diſtabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R}KZ$; fiat $\frac{I}{R}KZ - DZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$, & cape DY ad partes lentis adverſas ipſi K.

De ſenſibiliter autem propinqua diſtantia radiantium ſeu divergentes radios emittentium punctorum (qualia ſemper deſignat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejuſmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155. I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

$$\text{Fiat} \left\{ \begin{array}{l} R \,.\, I :: AB \,.\, BZ, \ \& \\ I \,.\, R :: DZ \,.\, DY. \end{array} \right.$$

Brevius. Fiat $I \,.\, I - R :: BD \,.\, AY$.

Fig. 156. III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano-concavam converg.*

Fiat $R \,.\, I :: AB \,.\, BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, ſi $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R}KZ - DZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & cape DY ad partes lentis adverſus A.

2. Si $\frac{I}{R}KZ = DZ$; imago diſtabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & cape DY verſus A.

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY verſus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

$$\text{Fiat}\begin{cases} R . I :: AB . BZ;\ \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adverſas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè diſtabit.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; deprehendentur Z, & Y verſus A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; ſin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I}AC$, facto $AB - \frac{R}{I}AC \,.\, AB :: BC \,.\, BZ$; & $\frac{I}{R}KZ - DZ :: DK \,.\, DY$; puncta Z, Y adverſus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I}AC$, fac $I - R \,.\, R :: DK \,.\, DY$; & cape DY adverſus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I}AC$; fac $\frac{R}{I}AC - AB \,.\, AB :: BC \,.\, BZ$; & ſume BZ verſus A. Jam cùm Z cadit extra DK, ſi primò ſit $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R}KZ - DZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & ſume DY adverſus A.

4. Secundò, ſi $\frac{I}{R}KZ = DZ$, imago diſtabit infinitè.

5. Tertiò, ſi $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R}KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; & ſume DY verſus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat $DZ + \frac{I}{R}KZ \,.\, DZ :: DK \,.\, DY$; ſumatúrque DY verſus A.

Corol. Ad integram Sphæram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I}AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I}AC \,.\, AC :: BC \,.\, CY$; & cape CY adverſus A.

2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I}AC$; imago in infinitum abit.

3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I}AC$; fiat $\frac{2R}{I}AC - AC - AB \,.\, AC :: BC \,.\, CY$; capiatúrque CY verſus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

Si

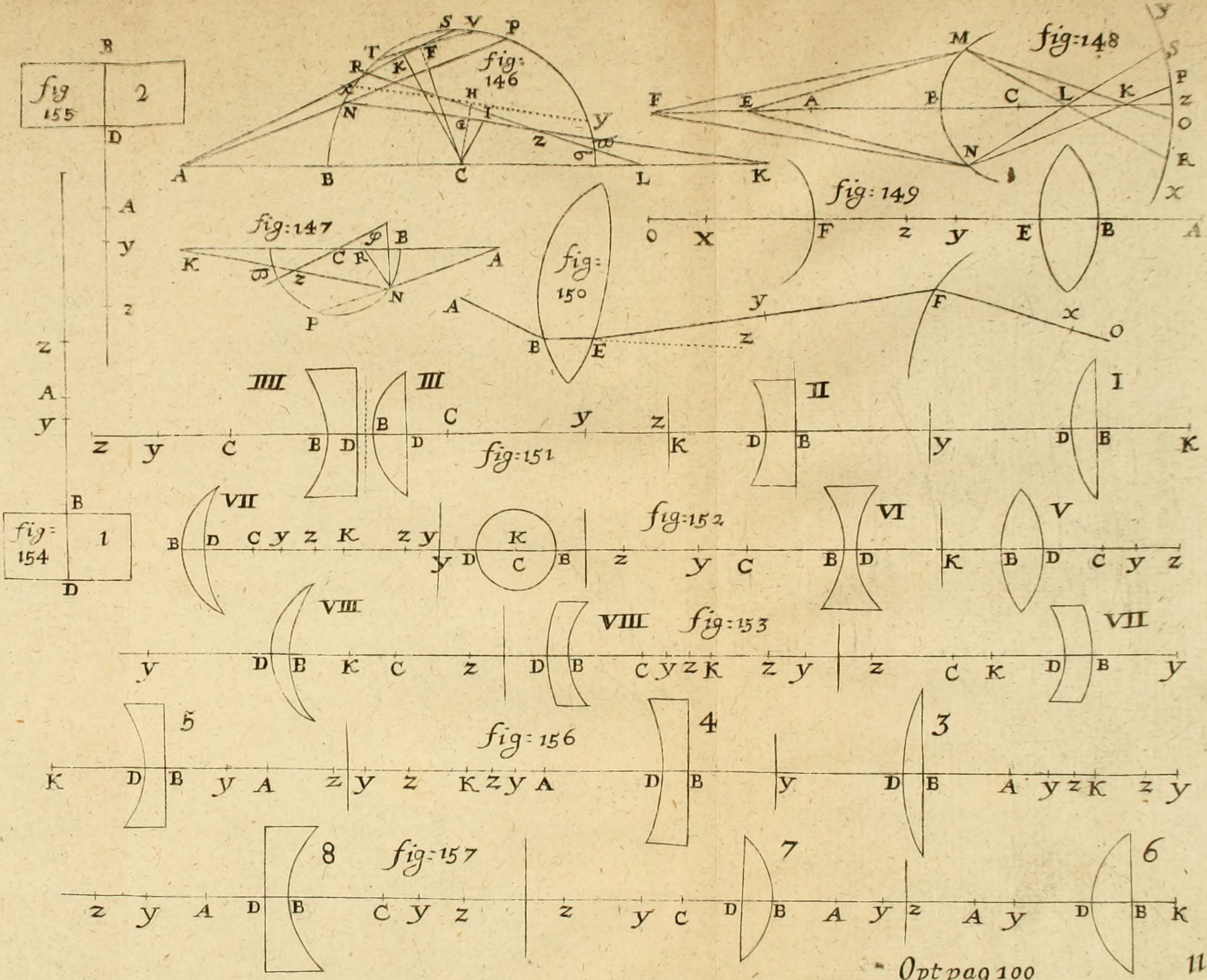


fig 155
fig: 146
fig: 148
fig: 147
fig: 149
fig: 150
fig: 151
fig: 154
fig: 152
fig: 153
fig: 156
fig: 157
I
II
III
IIII
V
VI
VII
VIII
1
2
3
4
5
6
7
8
A B C D E F G H I K L M N O P R S T V X Y Z

Opt pag 100

11

Si A cadat extra B C, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; ſin A cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; deinde fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$. Fig. 159.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra B C ponatur, fiat $AB + \frac{I - 2R}{I} AC :: BC . CY$. ſin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R - I}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape C Y ad partes centri verſus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; puncta Z, & Y verſus A cadunt, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$; fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape D Y verſus A.

3. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$; fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & cape B Z adverſus A. Jam quum Z cadit extra D K, tum primò ſi $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY verſus A.

4. Secundò, ſi $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago infinitè diſtabit.

5. Tertiò, ſi $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$, & ſume D Y adverſus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & ſumatur D Y adverſus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160, 161, 162. XVII. *Ad lentem concavo-convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; ſin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra DK, tum primò ſi $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY adverſus A.

2. Secundò, ſi $\frac{I}{R} KZ = DZ$; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, ſi $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & ſume DY verſus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur DY verſus A.

Hiſce ſubnectam ſequentia; non contemnendum in *Engyſcopicis* uſum præ ſe ferentia *Problemata.*

Fig. 163. I. *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ reſultat ex omnibus, quos ipſum A diffundit, radiis in ipſa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur ZB in C, ut ſit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C deſcribatur circulus EBF. item centro Z intervallo quovis ZD (majori quam ZB) deſcribatur circulus GDH; factum erit; nempe lens EFGH puncti A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB puncta A, Z è propoſitis facilè determinari.

In vitro, ſi $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{array} \right\} \& \left\{ \begin{array}{l} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{array} \right.$

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A refringi.

Hujuſmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità conſtruatur: ſit Z D diſtantia, ad quam optimè cernunt; ſumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{5}{8} ZB$; tum centro C per B deſcribatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H deſcribatur; ipſi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A diſtinctè ſpectabunt, velut ad Z ſitum.

Quòd ſi velit *Myops*, ad diſtantiam itidem Z D diſtinctè cernens, aſſignatum punctum A contemplari; adſumpto, ut prius, liberè puncto B, fiat $CB = \frac{2AB \times ZB}{5AB - 3ZB}$; & reliqua fiant, ut priùs.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum alìud punctum Z longinquius projicere.* Fig. 164.

Fiat A Z . A D : : I — R . R . item dividatur A D in C, ut ſit C D . C A : : I . R; & centro C per D deſcribatur circulus E D F . item centro A, quopiam intervallo A B (minori quàm A D) deſcribatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z viciſſim è propoſitis innoteſcunt.

In vitro, ſi $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{array} \right\}$ & $\left\{ \begin{array}{l} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{array} \right.$

Itidem & hìc, per lentem E F verſus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi diſtinctè videant. Secetur Z D in A, ut ſit $AD = \frac{3}{5} ZD$. item ſit $CD = \frac{5}{8} AD$ (vel ſit $CD = \frac{3}{8} ZD$) centróque C per D deſcribatur circulus E D F . item utcunque ſumpto puncto B (citra D nempe, verſus A) centro A per B deſcribatur circulus E B F . lente E F dicti *Presbytæ* punctum A diſtinctiſſimè conſpicient. ||

Hiſce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuſcunque caſûs imaginem Geometricè deſignandi; ut & lentem deſcribendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem deſignare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem conſtituentium erigantur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I ſecans B P, & C I in P, & I . fac C I . C R : : I . R . agatur recta R P ſecans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac K ϱ . K j : : R . I; & agatur i Q, quæ producta ſecabit axin in Y, loco imaginis quæſito. || Fig. 165, 166, 167.

2. *Re-*

Fig. 168.

2. *Reliquis datis, lentem deſcribere.*

Sumantur ad arbitrium B Y diſtantia lentis ab imagine, B D craſſities lentis, & alter circulorum lentem conſtituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum ſit C; & ad iſta puncta B, D, C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I ſecans B P, & C I in P, & I. fiat C I . C R : : I . R; & agatur R P ſecans D Q in Q. fiat D Q. D S : : I . R; & agatur S Y ſecans R P productam in ϱ; à quo demittatur perpendicularis ϱ K; & centro K intervallo D K deſcribatur circulus E D F; erit E B F D lens quæſita.

Hic autem in nimium excreſcenti ſpatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

Bene longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ viſum afficiunt, inſtituto ſtadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodocunque proſecuti, quæ προυργιαίτερα nobis viſa, nec adeò pervulgata ſe objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantùm radiantibus agentes omnino videamur omiſiſſe) quales nimirum illæ ex hujuſmodi radiorum inflectionibus quoad ſitum, figuram, quantitatem mutationes ſubeunt, id fermè totum paſſim atque fuſiùs tractatum proſtat, nec animus eſt mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò ſpectantia pleraque cuncta de jam definitis ac oſtenſis haud difficili negotio colligi poſſe videntur; ſingulorum nempe cujuſvis objecti punctorum (extremorum præſertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad ſubſequentem quoque regulam (ſeu monitiunculam) preſſiùs animum advertentes forſan autumabitis. Si qualem aſſignata quævis ſuperficies inflectens (ſimplex aut compoſita) magnitudinis cujuſvis expoſitæ ſpeciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inverſam, confuſam diſtinctámve, ſeu quovis alio modo demutatam) internoſcere cupiatis,

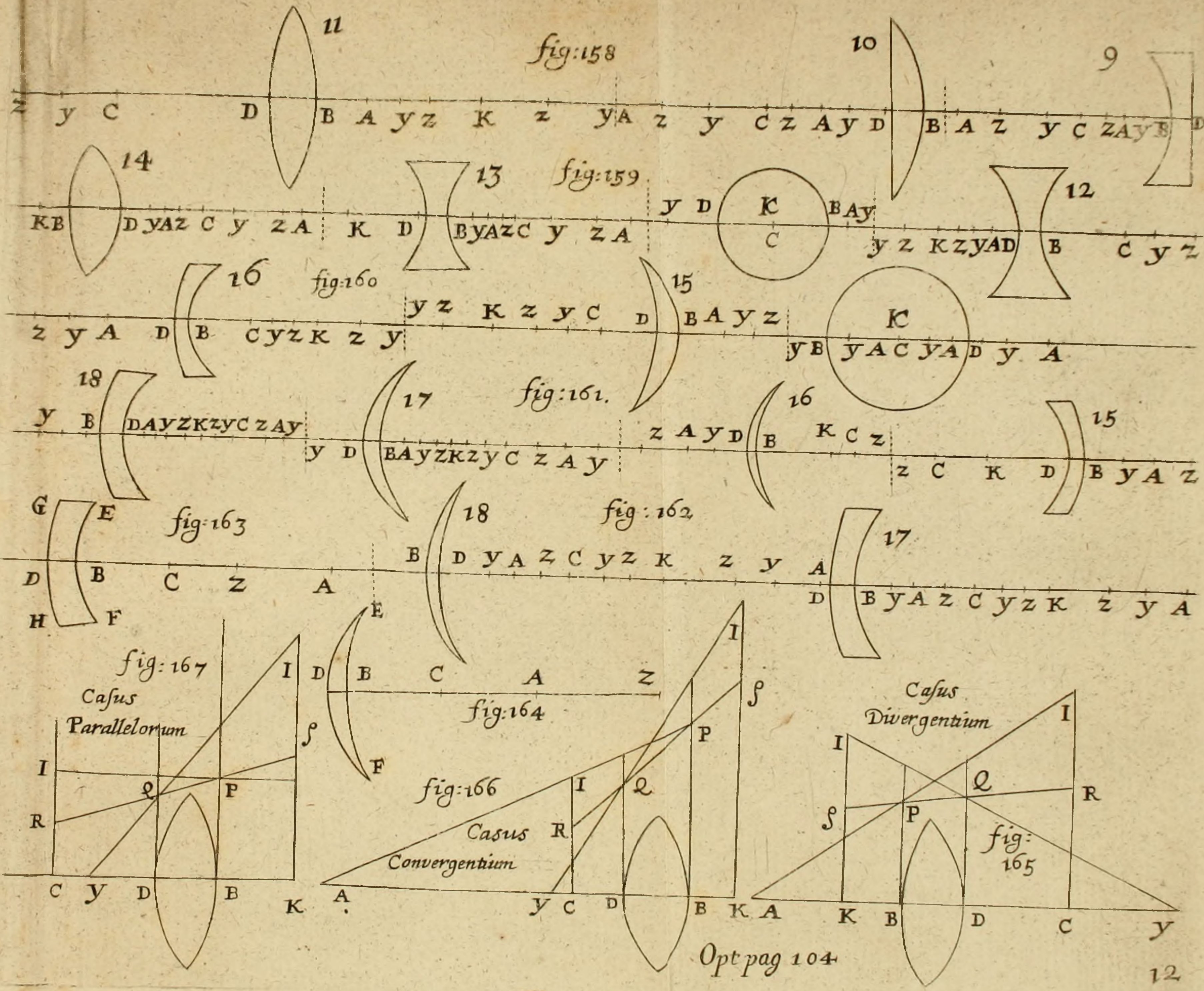


fig:158
fig:159
fig:160
fig:161.
fig:162
fig:163
fig:164
fig:165
fig:166
fig:167
11
10
9
14
13
12
16
15
18
17
Casus Parallelorum
Casus Convergentium
Casus Divergentium
Z y C D B A y z K z y A z y C z A y D B A Z y C Z A y B D
K B D y A z C y z A K D B y A z C y z A y D K C B A y y z K z y A D B C y z
z y A D B C y z K z y y z K z y C D B A y z K y B y A C y A D y A
y B D A y z K z y C z A y y D B A y z K z y C z A y z A y D B K C z z C K D B y A z
G E D B H F C z A B D y A z C y z K z y A D B y A z C y z K z y A
D B C A z E F
I ʃ R Q P C y D B K
A I R Q y C D B K P I ʃ
I ʃ P Q R K B D C y A I

Opt pag 104

12

id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari paſſim ſupponitur, ei ſaltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu conſtitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propoſitam ſuperficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas ſpecialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè ſpecies inter duos primos ab oculi centro procedentes radios conſiſtet, quæ cum ipſo (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correſpondentium poſitionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, ſi extremorum ac mediorum præſertim objecti punctorum juſtas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis inveſtigare. ab appoſitis exemplis res manifeſtior evadet; in quibus notetur punctum O ſemper oculi centrum, rectam O B A radiationis axem (ſuperficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis denſioris (aquæ ſi placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta M N repræſentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii O M, O N; qui in M F, N G refringantur; inter hos jam deſignetur objectum F A G (ab axe O A biſectum) hujus è medio F G M N ſpectati ſpecies (vel apparentia) alicubi conſiſtet inter rectas O M, O N, veluti puta ad φ α γ. cùm autem (ut ex hujuſce ſuperficiei natura, communíque refractionum lege palàm eſt) ſit angulus φ O γ major angulo F O G; hæc objecti ſpeciem amplificat inflectio. item cùm puncta (ſibi reſpondentia) F, φ; & G, γ ad eaſdem reſpectivè partes jaceant, ab eadem objecti poſito non immutatur. quòd ſi punctorum φ, α, γ poſitio juxta ſuperiorem doctrinam ſtrictiùs exquiratur, de totius imaginis φ α γ figurâ diſtantiâque ſatìs accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus denſum* P M N Q, *Superficiebus planis parallelis* (M N, P Q) *comprehenſum*; & ab oculi centro O prodeuntes radii O M, O N ad ſuperficiem M N refringantur in M P, N Q; horum verò ad Superficiem P Q refracti ſint P F, Q G (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipſis O M, O N æquidiſtabunt) inter P F, Q G ſtatuatur objectum F A G, cujus ſit imago φ α γ; tum verò manifeſtum eſt hìc ſe rem ſimiliter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus ſpecularis concavus* M B N, & radiorum O M, O N reflexi ſint M F, N G (ſe decuſſantes in H, & cum ipſis O M, O N concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum F A G; ejus itidem imago rectis O M, O N interjacebit, puta ad φ α γ. comparando jam angulos apparentes F O G, φ O γ, clarè vides objecti F A G ſpeciem imminui. item cernis puncta ſibi reſpondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, ſeu objecti ſitum hinc inverti. Quòd ſi intra angulum & ſpatium X H Y ſtatui concipiatur objectum, clarum eſt hinc ejus quidem ſpeciem ampliari, ſed adhuc ſitum inverti. ſin inter ipſa X Y conſiſtat objectum, ejus itidem invertetur ſitus, at quantitas non immutabitur. demùm ſi intra angulum N H M conſtituatur objectum, puta R L S; cujus imago ſit ϱ λ σ; evidens eſt hujuſce ſpeciem creſcere, ſitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* M B N; factíſque ſimiliter ac in eo quod immediatè præceſſit omnibus; nè plura prodigam verba, vides objecti F A G ſpeciem (φ α γ) coarctari, ſed ejuſce poſitionem eandem perſiſtere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* M B N Q P. Radii O M, O N ad ſuperficiem M B N refringantur in M P, N Q; tum ipſi M P, N Q ad ſuperficiem P Q refringantur in ipſos P F, Q G (ſeſe decuſſantes in H, & cum ipſis O M, O N concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, ſi objectum F A G infra X Y (verſus H) ſtatuatur, ipſum ab imagine φ α γ majus, quàm obtutu ſimplice, repræſentari. Quòd ſi inter ipſa puncta X, Y ſubintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at ſi ſupra X Y ſtatuatur objectum R L S, ejus ſpecies, ad ϱ λ σ conſpicua, diminuetur; ubique verò punctorum correſpondentium poſitio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti P F, Q G verſus axem procurrentes convergunt) cùm objectum F A G citra punctum H ſumitur, vides ejus ſpeciem quantitate adauctam, at ſitu non mutatam. verùm objecti R L S ultra concurſum H poſiti imago ϱ λ σ nedum prototypo major eſt, at quoad ſitum etiam eidem inverſa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi poſitione, objecti ſpeciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inverſam; ſubinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos caſus ad examen facilè rediges hoc ad ſpecimen aciem mentis intendendo. Quinimo

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo pleraſque ſuperficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, poſitiones, diſtantias, figuras reſpiciunt) compluriúmque *Phænomenων* cauſas ipſe ſtatim operâ levi deprehendes; quibus in expreſſius deducendis libri plures ad tantam molem extumeſcere vel poſſunt, vel ſolent; ut mihi ſaltem opus non ſit hujuſmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla ſuccurrunt animadverſione non indigna, de magnitudinum etiam apparentiis, tam *Dioptricis* quàm *Catoptricis*, ſpecialia quædam proponam; ea verò commodius ſequentem præſtolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta ſit, aliquatenus explendæ *Problemation* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum F G, ab oculi, circulíque refringentis axe A B O biſectum; datúſque ſit angulus ſimpliciter (oculo nempe nudo) apparens F O G. item aſſignetur punctum Z, quod imago ſit puncti A à circulo refringente facta; datus ſit denuò ex refractione apparens angulus P O Q; propoſitum eſt circulum iſtum refringentem deſcribere (vel determinare). Fig. 175.

Analyſis. Factum eſto; ſit nempe circulus B N, qualis requiritur, cujus ſit centrum C, vertex B; & qui rectam O P in N ſecet. ducatur C Y ad O F parallela, rectæque O P occurrens in Y, & connectatur C N. cum itaque ſit N Y refractus radii ad F O, vel C Y paralleli; erit C Y . Y N :: R . I . ergò ratio C Y ad Y N datur; & cùm præterea angulus Y (dato F O P æqualis) detur, etiam (in triangulo C Y N) angulus C N Y innoteſcet. itaque triangulum C O N ſpecie datur; unde ratio C O ad C N (vel C B) datur. eſt autem C B . C Z :: I — R . R. ergò ratio C B ad C Z datur. itaque ratio C O ad C Z quoque datur; unde ratio C O ad O Z datur. verum O Z datur; ergo etiam C O datur. hinc demùm & ipſa C B datur.

Componitur autem in hunc modum. In O F utcunque capiatur O ς, & fiat O ς . O σ :: R . I. & connectatur σ ς ζ; ducatúrque Z R S ad ζ σ parallela. tum fiat O Z . Z T :: I — R . R (unde componendo O T . Z T :: I . R) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum X . O Z :: O Z . Y. denique X . Y :: O Z . O C (unde erit X q . O Z q :: O Z . O C; hoc eſt O Z q — V q . O Z q :: O Z . O C; hoc eſt O Z q — Z T × Z S . O Z q :: O Z . O C). per C verò ducatur C N ad Z S parallela, ſecans O P in N. denique centro C per N ducatur circulus B N; is propoſito ſatisfacit.

Nam ob $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$; erit OZ cub $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$. tranſponendóque $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$ cub. atqui propter $OZ . ZS :: OC . CN$. eſt $OZ \times CN = ZS \times OC$. quare $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$ cub; adeóque (elidendo OZ) erit $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$. vel $CN . OC - OZ :: OZ . ZT$; hoc eſt $CB . CZ :: OT . ZT$. & componendo $BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R$. itaque primò liquet punctum Z imaginem eſſe puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob $CY . YN :: \varrho O . O\sigma :: R . I$; palàm eſt NO refractum eſſe radii ad CY, hoc eſt ad FO paralleli. liquidò proinde conſtat propoſitum. ||

In hoc caſu debet eſſe $OZq \sqsubset ZT \times ZS$. Haud abſimili ratione quoad alios caſus (ut ſi circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego ſpecimen tantùm *inſtitui Problematis*, juxta quod viſibilis objecti ſpecies per refractionem circularem ſecundum præſtitutas quantitatem atque diſtantiam utcunque poſſit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò ſtrigoſior Lectio nonnihil incraſſetur, faciam hìc (quanquam alienore loco) quod alibi (ſi mihi tunc in mentem veniſſet) factum oportebat; raciociniis noſtris adverſantem, à viro doctiſſimo (alioquin opinor rarò dormitante) commiſſum paralogiſmum, nè cui fraudi ſit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam noſtram confirmabo. horſum è præmiſſis conſequens, ſed & experientiæ (ut videbimus) conſonum hoc præſterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehenſum objectum (puta lucidum punctum A) reverà duplum apparet, ſeu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi ſint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uſpiam conſtituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occurſum X exiſtat, è ſupra poſitis, ac probatis conſectatur (omnes enim imagines ad illa conſiſtere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi interſecant) itaque duæ ſunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis a) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujuſvis hoc modo ſpectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic effato ſi contraria obtendatur experientia, monſtrans ſubinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad ſuperficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines iſtæ duæ (quales α, a) ita ſibimet ipſis, ita refractorum concurſui X vicinæ ſunt, ut ipſarum intervallum diſcerni nequeat, ipſæque (ſicut in ſimili caſu obvenire mox oſtendemus) velut in unam imaginem interceptibilitèr coaleſcant; aſt in aliis diverſi generis inflectionibus, etiam ſenſu conteſtante, manifeſtè ſecùs apparet; id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis conſtare poſſit, unum ſaltem ac alterum proponemns. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P conſtitutis, apparebit ejuſce duplex ſpecies α, a; quarum illa (α) clauſo oculo O, hæc (a) clauſo P diſparebit.

Fig. 177, 178.

Notetur autem, ſi placet, imaginum α, a intervalla (pro vario oculorum ſitu) nunc magìs, nunc minùs deduci, ſic ut ſubinde coadunari videantur. Nempe ſi oculus P ad F concipiatur tranſlatus, ducatúrque F G ipſi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C poſitus concipiatur; quoniam F E minor eſt quàm F G, radius M O per G non tranſibit; tranſeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam conſiſtet imago α, ab altera a magìs elongata. Reliquarum hujuſmodi diverſitatum haud diſpar aſſignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an paſſim obſervatum neſcio, dignum certè quod obſervetur: Ad ſpeculum concavum R S M N faciem tuam F A G (ſpeculo propiùs ad motam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluſo) cernes ejus imaginem φ α γ; rurſus (oculo O occluſo) altero P conſpicies imaginem fag, à priore φ α γ aliquantùm deflectentem; demùm utroque ſimul oculo recluſo ſpectans illas in unam coalitas percipies; ſeu, ſpeciem unam aſpicies, perquam notabili diſcrimine, ampliorem priorum ſingularum alterutrà.

Fig. 179.

Exhinc, obiter, ſuſpicari licet, etiam intuitum ſimplicem adhibentibus objecta binis oculis ſpectata tantillo majora videri, quàm uno; ſpeciebus ità coëuntibus, ut non exquiſitè congruant.

Unicam prætereà ſubdemus inſtantiam: Per ſphæram vitream (aut ſi mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N tranſlucentem lucernulæ flammam A ſpecta; ejus duas imagines α, a obſervabis (pro oculorum ſitu magìs à ſe minúſve diſſitas) quarum una (α) clauſo oculo O, altera (a) clauſo P evaneſcet.

Fig 180.

Videtur hæc inſtantia vel ſola ſufficere vulgari ſententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A ſimplex imago ad punctum X conſiſteret.

Paralipom. pag. 178.

Has inſtantias, facilitatis gratiâ, ità propoſuimus, quaſi punctum A, unà cum duobus oculis O, P in plano exiſteret ad ſuperficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert; duas utcunque ſpecies apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo poſito rem non aliter ſe habituram.

In Dioptr.

His prælibatis, illud diſcutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; quo nempe *P. Herigonius* propoſitionem hanc ſuam comprobatum it: “Si oculus, & aſpectabile ſint in diverſis mediis ſè mutuo contingentibus, imago apparebit in concurſu catheti, & radii ab oculo per punctum refractionis directè producti.

Fig. 181.

Sit utique punctum F in medio denſiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D conveniant in C; ſit autem ſuperficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonſtrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D exiſtit, ergò in horum interſectione C exiſtet. verùm interſectio C in recta F G exiſtet; quoniam hæc communis eſt ſectio planorum A E F, B D F ſuperficiei refringenti rectorum. ergò liquet propoſitum.

In hanc demonſtrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falſum eſt, præterquam in uno vel altero caſu; quum nempe planum A B F in eodem exiſtit cum ipſa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B ſunt in ſuperficie coni recti, cujus axis eſt recta F G. quòd ſi prior caſus ponatur, è ſuprà demonſtratis manifeſtum eſt refractos A E, B D non in recta F G, ſed intra angulum F G H convenire; quod è principiis noſtris elicitum illum ſaltem conſtringere debet, qui principia iſta admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonſtratio ipſam ſe perimit: Nam, quoniam (in poſito caſu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D exiſtit, adeóque in harum concurſu; concurſus autem iſte non eſt in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G verſari. 3. Supponit iſte diſcurſus (ut & ſuppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò ſuprà refutatum. Enimverò diverſi oculi ſunt reipsâ diverſi ſpectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud ſatìs enervant. ||

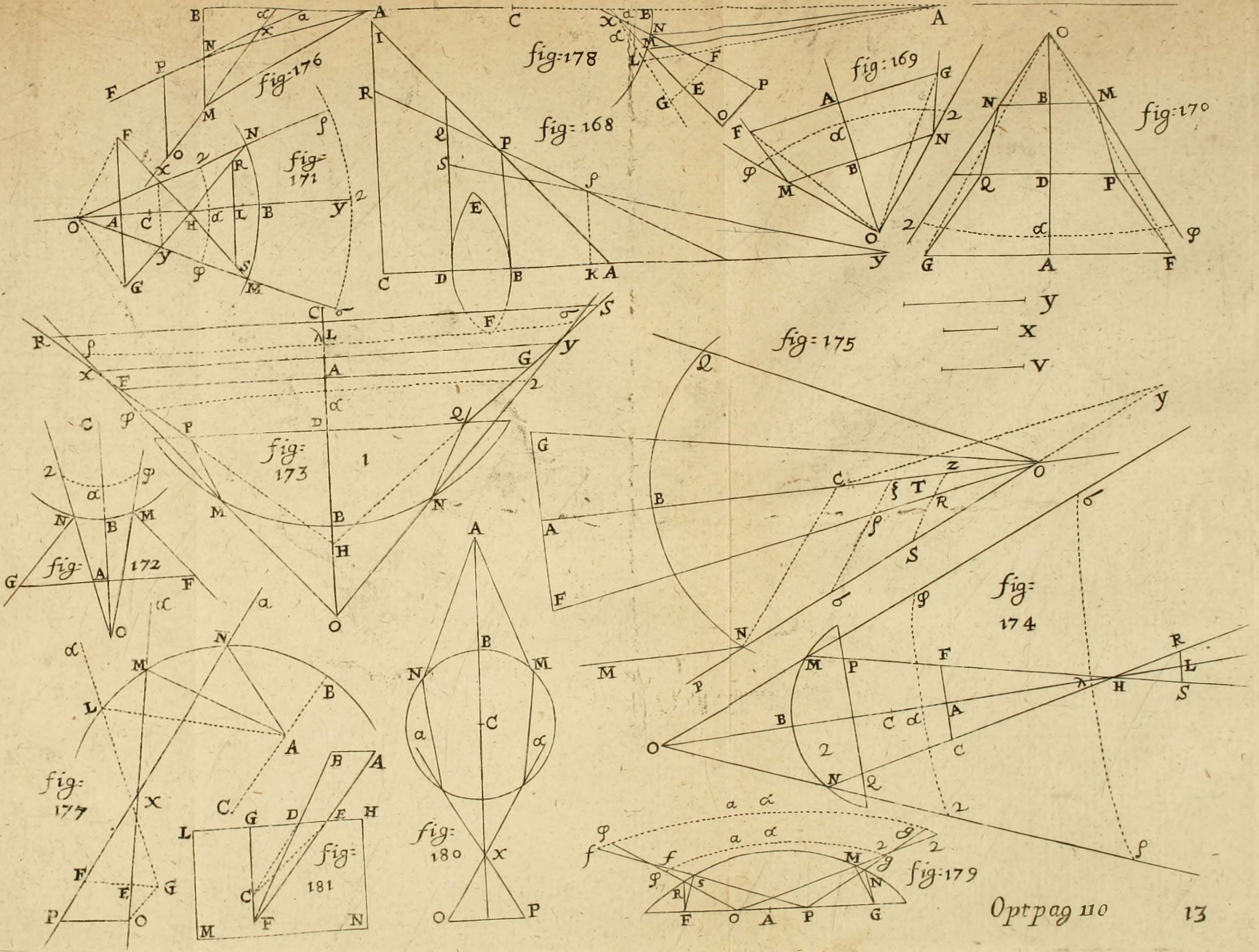


fig: 176
fig: 178
fig: 169
fig: 170
fig: 171
fig: 168
fig: 175
fig: 173
fig: 172
fig: 174
fig: 177
fig: 181
fig: 180
fig: 179
y
x
v

Optpag 110 13

Lect. XVI.

I. P*Unctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis*, conquieſcere poſſem ; ſiquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur , quotlibet in ipſis exiſtentium punctorum imagines deſignando . cæterùm nè juſto parcius in hac parte, vel illiberaliùs egiſſe videar , etiam *de rectarum linearum (conſequenter & planarum ſuperficierum , quibus diſtinctè viſui repræſentandis natura præcipuè conſuluiſſe videtur) apparentiis & imaginibus expreſſiora ſpecimina quædam haud gravabor adnectere* . de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimìs ; Sicuti (quod ſæpiùs in antedictis habetur inſinuatum) cujuſque puncti quodammodò duplex eſt imago ; una ſimplex, abſoluta, principalis ; illa ſcilicet , quæ in recta verſatur ad ſuperficiem inflectentem perpendiculari , perque radians punctum ſimul ac oculi centrum tranſeunte (hoc eſt in communi lucidæ radiationis , ſuperficiei reflectentis , ipſiúſque viſionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minùs præcipua ; quæ talis eſt reſpectu oculi extra rectam inflectenti ſuperficiei perpendicularem arbitrariè conſtituti ; ità pari fermè modo duplex cujuſque magnitudinis imago concipi poteſt una quidem abſoluta (quam ſaltem hoc nomine deſignabo) quæ ex punctorum ſingulorum in ipſa exiſtentium abſolutis imaginibus quaſi conflatur , illas ſaltem comprehendit (qualis in objecta congrua ſuperficie vividè deformaretur ; qualíſque videretur oculo ad infinitam ab inflectente ſuperficie diſtantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum reſpicit ubivis in certa poſitione conſtitutum ; quid velim, & quare ſic diſtinguam ab exemplis benè multis in decurſu proponendis luculenter apparebit.

Fig. 182. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam ſi placet ac aërem)* repræſentet recta P Q, & aquæ inſit recta F P ad P Q perpendicularis. fiat autem F P . X P :: R . I; erit X P imago abſoluta rectæ F P; continet illa ſcilicet omnes locos punctorum, quæ in F P, oculo apparentes in ipſa F P ſito. verùm ſi ponatur oculus uſpiam extra F P, velut ad O, ei tota F P citra X P apparebit. tranſeat videlicet alicujus radii F M refractus per O, & protrahatur O M, ut occurrat ipſi F P in K. eſt ergò (ſecundum præmonſtrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius oſtenſis) puncti F imago quæ in refracto O M K, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. ſimili ratione cujuſvis alterius in ipſa F P accepti puncti, ceu R, imago (cogita ρ) citra rectam X P, verſus oculum, jacet. totius itaque rectæ F P imago talis eſt, qualem curva linea φ ρ P refert. quòd ſi P F infinitè protrahatur, ejus totius imago P ρ ρ verſus aſymptoton O B A, ad P F parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P ρ φ hoc modo.* ab O ducatur utcunque recta O M K ſecans rectam P Q in M; & (poſito fore $S = \sqrt{Rq - Iq}$) ſit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur H φ ad P R parallela, ipſi O K occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, ſi O M K ipſius M F refractus concipiatur, erit punctum φ ipſius F imago. eodem modo reliqua lineæ P ρ ρ puncta deſignantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adſumptâ rectâ F G ad P Q parallelâ, ductâque G Q ad F P (vel A B O) parallelâ; item per X ductâ X α Y ad P Q parallelâ, erit quidem recta X α Y rectæ F A G imago abſoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam X Y tota jacet, eámque curva φ α γ repræſentat, admodum jamjam præſcriptum punctatim delineabilis. itaque compoſitæ lineæ P F G Q, circa axem O B A rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vaſculi cylindrici aquâ repleti ſuperficiem inſpectando.

Fig. 183. VI. Quòd ſi recta viſibilis F G ad P Q inclinata ſit, cum ea conveniens in V; & connectatur X V, erit rurſus X Y ipſius F G imago abſoluta; relatam vero curva φ α γ repræſentat.

Fig. 184. VII. Quòd ſi viciſſim *oculus O in aqua ponatur conſtitutus*, & ab indè reſpiciatur recta P F in aëre poſita, fiatque rurſus P F . P X :: R . I;

R . I ; erit quidem X P imago rectæ F P abſoluta ; at ejuſdem imago relata (puta P $\varrho\,\varphi\,\varrho$) ultra P F R jacet, ab illa ſenſim reclinans ; ejúſque puncta quælibet ita ſignantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q ſecans in M, & ſit K M ipſius F M refractus, tum (poſito rurſus $S = \surd\, Iq - Rq$) fiat $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq}\, PM$, & per H ad P F parallela ducatur H φ, ipſam O M K interſecans ad φ ; erit punctum φ in dicta linea, punctum ſcilicet F repræſentans. eodémque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipſam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata $\varphi\,\alpha\,\gamma$ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris casûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem appoſita figura ſatìs exprimit.

Hæc autem omnia de ſuprà comprobatis dilucidè conſectantur.

IX. Ac ità quidem circa ſimplices planas ſuperficies refringentes Fig. 185. ſeſe res habet. Quòd ſi corpori parallelis planis M N, $\mu\,\nu$ terminato exponatur recta F G ; Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipſi P Q perpendiculares, & fiat B D . B S : : I . R ; adſumatúrque Aα = DS ; & fiat A B . $\alpha\beta$: : F P . X P ; & per X, α ducatur recta X α Y, erit XαY lineæ F A G imago abſoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc caſu) citra ipſam XαY verſus ſuperficiem $\mu\,\nu$ nonnihil incurvata diſponetur, qualem exhibet linea $\varphi\,\alpha\,\gamma$. id quod ex eo ſatìs videtur liquere, quòd recta XαY ſit imago reſpectu oculi in ipſa O B à B infinitè ſemoti. deſignari verò poterit hæc imago ad hunc modum. ſit *fag* (minuſculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad ſuperficiem refringentem $\mu\,\nu$ relata (hoc eſt ad oculos in refractis fμ M, qν N, a D B, reliquíſque, nec non in medio $\mu\,\nu$ M N verſus O protenſo, ſitos) juxta proximè commonſtrata delineabilis. tum hujus ipſius *fag* velut in medio M N $\mu\,\nu$ verſus A protenſo poſitæ, ex refractione ad ſuperficiem M N emergens, & ad oculum O relata conſtruatur imago $\varphi\,\alpha\,\gamma$ (itidem ad modum nuperrimè præſcriptum) hæc rectam F A G per corpus M N $\mu\,\nu$ ſpectatam repræſentabit. experientia teſtis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore ſuperſedeo.

X. Porrò quod *plana ſpecula* (ſimplicia, vel compoſita) attinet, in iis palàm eſt imagines abſolutas ac relatas omnino ſibi coincidere ; quo fit, ut eæ objectorum magnitudines, figuras, diſtantias (ſitu tamen nonnunquam inverſo) quàm exactiſſimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitus reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA; in qua ſumatur portio quædam AR, fiatque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago abſoluta rectæ RA; quod ſi CB biſecetur in Z; erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago abſoluta; hoc eſt, illæ tales erunt oculi reſpectu in ipſa AB conſtituti. ſecùs autem uſpiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conſpicuum eſt (hoc eſt quod ſupra horizontem OT, ſpeculo contiguum extat) ſupra citráque XB apparebit. Enimvero tranſeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim oſtenſum) ſupra punctum X, verſus A, extat. quinetiam (ex indidem monſtratis) puncti A imagines omnes, oculum O reſpicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA verſus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta α, in ipſa KM exiſtet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox oſtendemus). ſimili ratione puncti R imago, cogita ρ, ſupra Y, citráque BY jacet. quòd ſi porrò per O tranſeat recta ODLH, quæ reflexa ſit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipſa AB infinitè ſemoti; hæc puta ſit ad σ. erit itaque curva Bρασ imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Iſta verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO deſcribatur circulus OTC; & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa ſit MA; in qua ſumatur ME = MF; tum ſecetur FM in α, ut ſit Fα.αM::AE.AM; erit (è pridem demonſtratis) punctum α puncti A imago. ſimili modo quotcunque lineæ Bαρσ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem ſit punctum α citra K (verſus oculum) ità conſtabit. Ducatur FQ ad AM parallela. eſt ergo angulus FQA par angulo CAM. aſt angulus FCA angulo ACE minor eſt. ergò eſt CF.FQ $\sqsubset$ CE.AE. atqui CF = CE; quare FQ $\sqsupset$ AE. ergò eſt FQ.AM $\sqsupset$ AE.AM. hoc eſt FK.KM $\sqsupset$ Fα.αM. componendóque FM.KM $\sqsupset$ FM.αM. unde KM $\sqsubset$ αM. adeóque punctum α citra K verſus O jacet: Q.E.D.

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communíſque fermè ſententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipſam B L imagines ſtatuit; proindéque corruunt omnia, quæ principio ſuperextruunt iſti gratìs adſumpto, rationíque diſſentaneo. Veruntamen *Opticorum noviſſimus ſcriptor*, *eruditiſſimúſque vir*, veterum ipſe veſtigiis inſiſtens poſtulatum iſtud ab experientia ſtabilitum vult, ejúſque veritatem ſeſe deprædicat centies explorâſſe; doctrinam itaque noſtram invicto ſensûs teſtimonio refutavit. atqui repono, non potuiſſe illum quantumvis oculatum & ſagacem quod obtendit vel ſemel explorare. nec hoc in caſu poterit doctrina noſtra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A ſitum exactè dignoſcere perquam arduum, forſan impoſſibile fuerit) quum lineola $B\alpha\varrho\sigma$ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræſentet, ipſúmque punctum σ (infinitè diſſito puncto S reſpondens, atque rectam D H biſecans) à puncto L modicè diſtet, quæ amabò viſûs acies curvæ $B\alpha\sigma$ à recta B L deflectionem cernat? itaque fruſtrà eſſe videtur acutiſſimus vir, ad teſtem provocans hac in parte minùs competentem, déque cujus ſententia vix ullatenus conſtare poſſit. Sanè quoad affinem in *Dioptricis* caſum, quem attigimus ſupra, demiſſo in aquam perpendiculo, oculo ſimpliciter inſpectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verùm ope reflectionis juſtum perpendicularis ſitum obſervando (qui nudo ſcilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immerſi perpendiculi imago ab ipſo deviare. neque dubito quin pariter in præſente caſu ritè conſulta experientia pro nobis ſit pronunciatura. Quinimò noſtris ex effatis (luculentâ opinor ratione ſuffultis) apparebit, unde principium illud multis in caſibus experientiæ videatur conſentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multùm abſcedat; ejúſque proinde falſitatem ſenſus (niſi ratione, vel certiore ſenſu adjutus) perſpicere nequeat. aſt exorbito.

XV. Sit rurſus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, biſecetúrque ſemidiameter C B in Z; ac in Z B ſumptis quibuſcunque punctis A, R; fiat C A. A B :: C X. X B; itémque C R. R B :: C Y. Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago abſoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C uſpiam conſtituto viſu, velut ad O, ad hunc relatæ ipſius Z B, ejúſque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum CO deſcribatur circulus CFH; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus ſit DS, contingat fore DS $= \frac{1}{2}$ DH, vel $\frac{1}{2}$ DI; poſitâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facilè duci poſſe concipiatur; & per curvam appropriatam reverà ſtatim determinetur; id proinde nos non diſtinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, niſi Hσ, σD. ſint infinitæ) eſt Hσ . σD :: IS . SD. Jam in arcum DB cadat utcunque radius OM, cujus reflexus ſit MAE; & in hac ſumatur ME = MF; tum in OM producta capiatur punctum α, ut ſit Fα . αM :: EA . AM; erit α puncti A imago. ſimili methodo reperiatur ϱ puncti R imago; neque non reliqua totius Bϱασ, ipſam BS referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò conſtructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd CS ⊏ CZ. Nam 4 CZq = CBq = 3 SDq + CSq ergò quum ſit CZ ⊏ SD; erit CS ⊏ CZ.

2. Quòd CA ⊏ CS. Nam (è ſuprà monſtratis) ſi ducatur recta Mψ ad DO parallela, ejuſce reflexa (puta Mξ) ſecabit ipſam DS, verſus I, puta ad ξ. ergò Mξ ipſam CB ſecabit ſupra punctum S; velut ad φ. atqui quoniam ang. CMO ⊏ CMψ, ſeu ang. CMA ⊏ CMφ, eſt CA ⊏ Cφ; adeóque magis eſt CA ⊏ CS.

3. Quòd EA ⊏ AM. cùm enim ſit EM (vel FM) ⊏ HD; atque DS ⊏ MA; erit EM . MA ⊏ FD . DS :: 2 . 1.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam Bϱασ ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela eſt hìc ang FCA ⊏ ang ACE & ang FQA = ang CAE. quapropter erit CF . FQ ⊐ CE . AE. adeóque FQ ⊏ AE. ac indè FQ . AM ⊏ AE . AM; hoc eſt FK . KM ⊏ Fα . αM. dividendóque FM . KM ⊏ FM . αM. quare αM ⊏ KM. adeóque punctum α ultra K in recta OK protenſa jacet.

XVIII. Quòd ſi ad partes alteras rectæ OD ducatur radius ON’ cujus reflexus NGT = NV; ſitque TG . GN ⊐ 2 . 1; ſtatuenda eſt puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura ſubjici poſſent, ego jam *Specimina* tantùm inſtituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curioſiùs proſequi) à minutiis abſtineo. quò & indè pronior ſum, quoniam in hac re copioſus videtur *A. Tacquetus*; ſubinde quidem is, ob admiſſum iſtud falſum principium, ceſpitans, at bene multa credo ſuggerens haud aſpernanda . relinquantur igitur ei cætera, mihi ſuffecerit, quod veriorem *Phænomena* detegendi declarandíque methodum adniſus ſim aliquatenus enucleare . pergamus ad alios caſus, haud ita pertractatos.

XIX Objiciatur ſpeculo M B N D recta F A G, rectæ C A (per ſpeculi centrum C tranſeunti) perpendicularis; adverto, ſi fuerit ipſa Fig. 189. C A major quam C Z, quadrans diametri B D, quòd rectæ F A G ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas ſimul ac convexas) imago abſoluta (quinetiam imago ad oculum in ipſo centro C conſtitutum relata) erit *Ellipſis* . item ſi C A minor ſit, quam C Z, quòd ipſius F A G imago abſoluta (vel dicto modo relata) conſtabit ex hyperbolis oppoſitis; ſi denuò C A ipſam C Z adæquet (vel F G per ipſum Z tranſeat) quòd ad parabolam ejuſmodi conſiſtet imago. Sed modum tranſgrederer hæc jam aggrediens demonſtrare. Expectent igitur. ||

LECT. XVII.

I. AD ea, quæ ſub finitam præcedentem propoſuimus demonſtranda *neceſſariam, alioquin notabilem, Conicarum Sectionum proprietatem* imprimìs oſtendemus.

Sit triangulum A C E, rectum habens angulum ad C; & indefinitè Fig. 190. protractis lateribus A C, A E, in A C ſumatur quodpiam punctum X, ducatúrque XG ad C E parallela; inſeratur autem angulo CXG recta CZ æqualis ipſi XG; dico punctum indeterminatum Z ad ſectionum conicarum aliquam conſiſtere.

II. Nempe primò, ſit angulus A ſemirecto minor (vel A C ⊏ C E) erit punctum Z ad ellipſin, quæ determinatur hoc pacto: Anguli L C P ſemirecti fiant (ad utramque rectæ C E partem) liquet igitur rectas C P ipſi A E occurrere, puta ad puncta R, & S. ab his ad ipſam EC parallelæ ducantur rectæ RT, SV; palam eſt indeterminatum punctum X inter limites T, V conſiſtere (nam extra TV punctum quodlibet L accipiendo, & indè ducendo LIP ad CE parallelam, erit CL, hoc eſt LP, major quàm LI, unde à C ad rectam LI, nulla duci recta poteſt æqualis ipſi LI). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipſin exiſtit, cujus axis TV, focus C. Nam biſecetur TV in K; fiat $VD = TC$; ducatur KH ad CE parallela; per H ducatur HN ad CK parallela. Eſtque $KH = \frac{TR + VS}{2} = \frac{CT + CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam $AV . AT :: (VS . TR$ (hoc eſt) $:: CV . CT ::) \; CV . DV$; erit per rationis converſionem $AV . TV :: CV . CD$. vel, conſequentes ſubduplando, $AV . KV :: CV . CK$. dividendóque $AK . KV :: KV . CK$; hoc eſt $AK . KH :: KH . CK$. hoc eſt $HN . NG :: KH . CK$. quare $KH \times NG = CK \times HN = CK \times KX$. atqui eſt $CZq = XGq = KHq + NGq + 2 KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2 CK \times KX = CKq + KXq + 2 KH \times NG$. ergo $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras biſegmenti K partes ſumatur $K\xi = KX$, ducatúrque $\xi\nu$ ad KH parallela, ſecans curvam $TEZV$ in ζ, & rectam AH in γ, ac ipſam NH in ν; erit quoque, ſimili ex diſcurſu, $\xi\zeta q = KHq + \nu\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$; connexíſque proinde rectis $C\zeta$, $D\zeta$, erit $D\zeta = CZ$; & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2 KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel $DZ + CZ$) $= TV$. unde perſpicitur *curvam* $T\zeta ZV$ *eſſe ellipſin*, cujus *axis* TV; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem ſecundò angulus CAE major ſemirecto (vel $AC \sqsupset CE$) dico punctum Z ad oppoſitas hyperbolas, conſimili modo determinabiles, exiſtere. enimverò factis (ad utramque rectæ CA partem) angulis ſemirectis ACP; & (ab ipſarum CP cum AE occurſibus) ductis rectis RT, SV ad CE parallelis, punctum X extra limites TV neceſſariò conſiſtet (etenim ubivis intra TV ductâ LIP ad CE parallelâ, erit $LI \sqsupset LP$, ideóque nulla par ipſi LI angulo ALI ſubtendi poteſt; id quod extra terminos hoſce nil prohibet fieri) erit jam TV axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in caſu præcedente; eritque rurſus hic $KH = KV$. item ob $AV . AT :: CV . DV$; & (inverſè componendo) AV.

$AV . TV :: CV . CD$; & conſequentes ſubduplando, dividendóque $AK . KV :: KV . KD :: KV . CK$. vel $AK . KH :: KH . CK$; hoc eſt HN (KX). $NG :: KH . CK$; quare $CK \times KX = KH \times NG$. eſt autem $XZq = CZq - CXq = XGq - CXq = NGq + KHq - 2NG \times KH : - KXq - CKq + 2CK \times KX = NGq + KHq - KXq - CKq$. Sumatur $K\xi = KX$, diſcurſúmque ſimilem adhibendo liquebit fore $\xi\zeta = XZ$; & ideò $D\zeta = CZ$. unde $C\zeta - D\zeta$ $(DZ - CZ)$ $= C\zeta - CZ = \xi\gamma - XG = 2KH = TV$. quare manifeſtum eſt *curvas* TZ, $V\zeta$ eſſe *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

Fig. 192.

IV. Tertiò demùm, ſit angulus CAE ſemirectus (vel $CA = CE$) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ itidem ita determinatur. Fiat angulus ACP ſemirectus, & ab ipſarum AE, CP interſectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota ſectionis hujus proprietate conſtat; qua ſcilicet eſt $TA = TR = TC$ (ob angulos TAR, TCR ſemirectos) & $AX = XG = CZ$.

V. Manifeſtum eſt verò rectam AE ſectiones has ad E contingere. quia nempe perpetuò major eſt CZ (vel XG) ordinatâ XZ; adeóque puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc eſt tota AG extra illas cadit.

Fig. 193.

VI. Hiſce præſtratis: *Eſto Circulare ſpeculum* $MBND$, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam FaG; & huic perpendicularis ſit recta Ca; quam ad partes averſas ſumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. ſumpto jam in recta FaG puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipſa FC limes, ſeu *focus*, ſit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipſi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipſi CZ.

Nam (è jam antè monſtratis) eſt $FC . CZ :: FM . MZ$ (hoc eſt) $:: FC - CB . CB - CZ$. hinc erit $aC . CX$ $(AC . CX)$ $:: FC - CB . CB - CZ$. quare (ducendo in ſe extrema, ac media) erit $AC \times CB - AC \times CZ = CX \times FC - CX \times CB$. hoc eſt (ipſi $CX \times FC$ ſubſtituendo $AC \times CZ$, propter $aC . CX :: FC . CZ$) erit $AC \times CB - AC \times CZ = AC \times CZ - CX \times CB$. tranſponendóque $AC \times CB + CX \times CB = 2AC \times CZ$.

hoc eſt $AX \times CB = 2AC \times CZ$; vel $2AX \times CE = 2AC \times CZ$; unde $AX . AC :: CZ . CE$; hoc eſt $XH . CE :: CZ . CE$. quapropter eſt $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè ſimilis eſt diſcurſus. examinetis ipſi, peto.

Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, ſi fuerit $CA \sqsubset CE$; quòd omnes punctorum F limites, ſeu foci (quales Z) ad ellipſin exiſtunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmiſſis, non uno modo, determinatur. item ſi $CA = CE$, limites Z ad parabolam conſiſtent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2} CE$, *vertex* T. denuò, ſi $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas eſſe conſtat*, quarum itidem *focus* C; & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò ſectionum *Parameter* ipſi CB æquatur.

VIII. Hinc in ſingulis reſpectivè caſibus, ejuſmodi *ſectiones conicæ* ſunt rectarum F*a*G abſolutæ imagines; quin & eædem veræ ſunt imagines ad oculum relatæ in ſpeculi centro conſtitutum; ex reflectione ſcilicet ad concavas ſpeculi partes effectæ; quæ ſolæ oculo ſic poſito conſpicuæ ſunt.

IX. Patet autem ſi recta F*a*G infinitè diſtet, quòd *ellipſis* in *circulum* abit. utì quoque ſi F*a*G per centrum tranſeat, quòd *hyperbolæ* iſtæ in rectam lineam degenerant.

X. Subnotetur etiam in caſu quum *imago ſit hyperbolica*, quod *hyperbolæ* YTY pars YEEY, neque non tota ζVζ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe ſi centro C per E deſcriptus circulus ipſam FG interſecet punctis K, tota hyperbola ζVζ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars ſuperior YEEY quod reliquum eſt repræſentabit hinc indè protenſæ rectæ FG) pars autem ETE ad partem concavam MDN ſpectat. id quod ſuffecerit admonitum.

Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus abſolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. ſit, inſtantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & ſit ellipſis ZVYT abſoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago; quam ductæ FC, GC punctis Z, Y ſecent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta φ, & γ) extra ellipſin

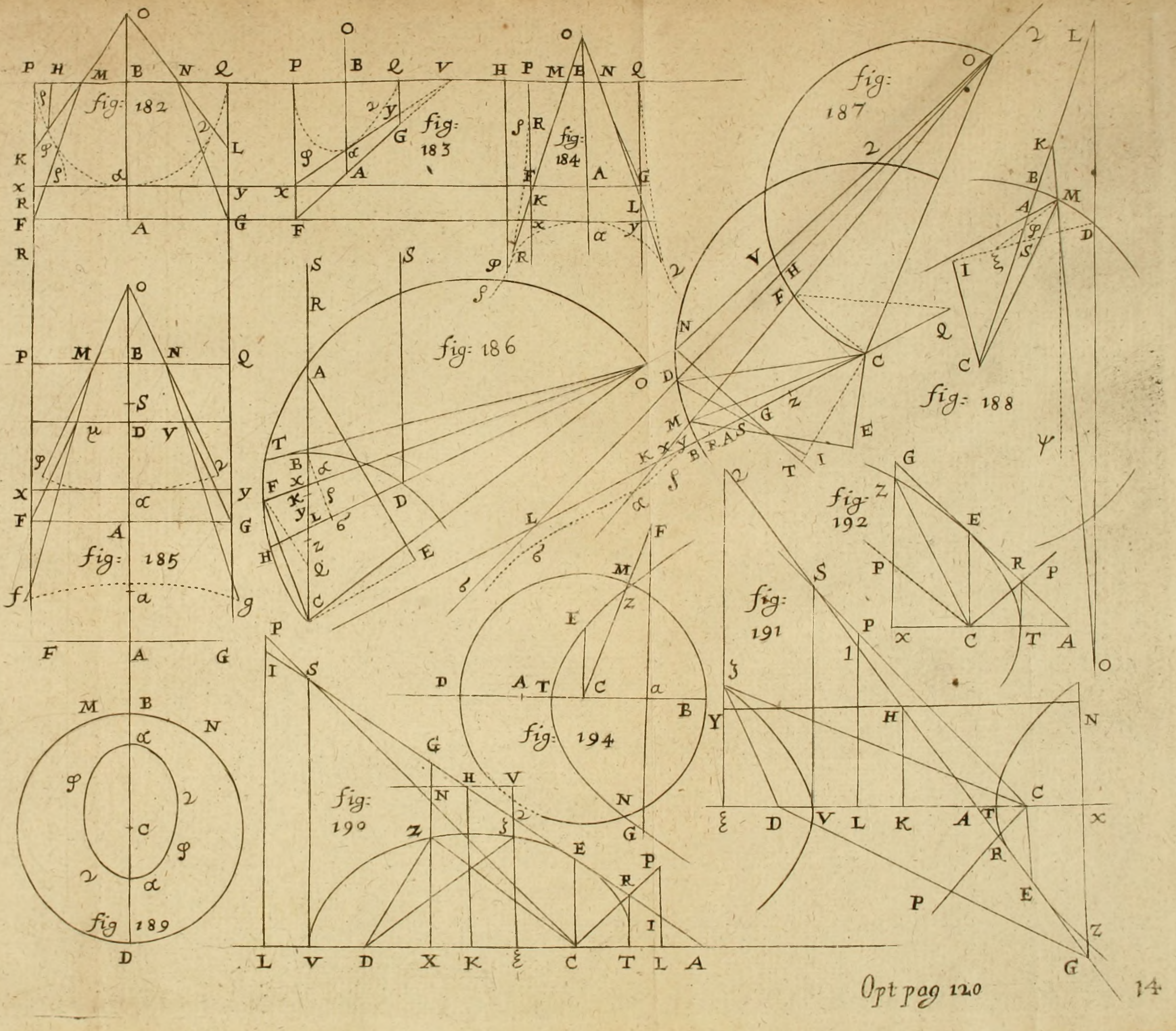


fig: 182
fig: 183
fig: 184
fig: 185
fig: 186
fig: 187
fig: 188
fig 189
fig: 190
fig: 191
fig: 192
fig: 194
O
P H M B N Q
K
x
R
F
A
G
L
y
P B Q V
G
A
F
H P M B N Q
R
F
K
A
G
L
y
α
S
D
C
E
T
I
M
Z
X
K
ξ
L
A
V
Y
N
ψ

Opt pag 120

ellipſin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum γ inter O, & L cadunt. imaginis itaque $\varphi\,\alpha\,\gamma$ figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compreſſior. non diſſimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros caſus inſtituetur judicium. tædii plenum eſſet omnia ſingillatim percenſere. quinetiam è præmiſſis luculentè conſtat quo pacto linea $\varphi\,\alpha\,\gamma$ præcisè deſcribatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præſtanda; poſtquam tamen paullùm reſpiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, ſtudiúmque demonſtrandis iſtis impenſum reſpectando, ſatìs fortaſſe multa videor tradidiſſe. ||

LECT. XVIII.

I. *Propoſitum eſt jam nobis rectæ lineæ ex refractione prognatas ad circulum imagines deſignare*; nempe primùm abſolutas; quorſum hoc ſpectat *Theorema*:

In circulum (e.g. medii denſioris) refractivum MBND radiet recta FAG; huic verò perpendicularis ſit recta CA (circuli centrum C permeans) tum in recta FG ſumpto liberè puncto F ducatur recta FC, & in hac ſit punctum Z limes (qualem anteà fiximus) radiationis à puncto F; ſit autem ZX ad AC normalis. porrò fiat CA . CR :: I . R; & AR . CB :: CR . CE (ponatur autem CE ad XZ parallela) tum connexa RE cum ipſa XZ conveniat in H. dico fore XH = CZ. Fig. 197.

Nam (è præmonſtratis) eſt FC × MZ . FM × CZ :: I . R :: CA . CR. hoc eſt FC × CM + FC × CZ . FC × CZ — CM × CZ :: CA . CR. quare (ducendo in ſe extrema, mediáque) eſt FC × CM × CR + FC × CZ × CR = FC × CZ × CA — $\underline{CM \times CZ \times CA = FC \times CZ \times CA - CM \times FC \times CX}$ (quoniam ſcilicet eſt

R CZ.

$CZ . FC :: CX . CA$; adeóque $CZ \times CA = FC \times CX$). quapropter (elidendo FC) eſt $CM \times CR + CZ \times CR = CZ \times CA - CM \times CX$; tranſponendóque $CM \times CR + CM \times CX = CZ \times CA - CZ \times CR$. hoc eſt $CM \times RX = CZ \times AR$. quare (ad analogiſmum redigendo) eſt $AR . CM :: RX . CZ$. hoc eſt $CR . CE :: RX . CZ$. hoc eſt $RX . XH :: RX . CZ$; unde $XH = CZ$: Quod E.D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *ſectiones conicas* nuperrimè ſunt oſtenſa) liquidò conſectatur, ſi CR major fuerit quàm CE (vel quod eódem recidit, AR major quàm CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines abſolutæ (quales Z) ad *ellipſin* conſiſtent, cujus *Focus* C, cujúſque penitus determinandæ modum ſatìs facilem tunc oſtendimus. item ſi $CR = CE$, quòd imagines iſtæ ad parabolam erunt; & denique, ſi $CR \sqsupset CE$, quòd eædem in hyperbolis oppoſitis reperientur; quarum etiam ſectionum focus communis eſt punctum C, & quarum axes deſignandi modum reliquáque circa ipſas præſertim advertenda declaravimus. (Nempe, ſi rectæ CP cum ipſa CA ſemirectos conſtituant angulos; & hæ rectam RE interſecent ad puncta S, indéque demittantur ad AC perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, rectáque CE ſemi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protenſæ abſolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C poſitum refertur) aliquam eſſe dictarum conicarum, pro ſuo peculiari ſitu hanc vel illam reſpectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in iſto caſu, *ſectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL ſpectare; ſicuti poſtica EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbolæ* ETE pars (infra ECE) YEEY ad partem circuli convexam referri debent (nempe ſi centro C, intervallo CE deſcriptus circulus rectam FG ſecet punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræſentabit, ipſiúſque FG quod reliquum eſt hinc indè protenſum pars YEEY referet) pars autem ſuperior ETE ad cavam circuli partem LDL ſpectat. || Semper autem (cùm hìc, tum ubique) intelligatur ad utraſque propoſiti circuli partes ejuſdem generis refractionem effici, ſeu ejuſdem ſpeciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura conſtruenda adhibuit,

buit, ſolertia quadantenus eluceſcere videatur, ſeu ratio quædam aſſignari poſſit, cur oculi fundus *Sphæroidicam* (aut ab hac non multùm abludentem) nacta ſit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè diſtantium (quibus in diſtinctius apprehendendis potiſſimus verſatur uſus) excipiendis ſimulachris eſt accommodatiſſima. Sed hoc παρεισοδικῶς.

V. In reliquis refractionum caſibus paria fermè contingunt, quos ideò tacitus præterlabi poſſem; at minuendo veſtro labori, ſeu quò clariùs & promptiùs de iis conſtet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo MBN objiciatur recta FAG, cui normalis CA; ſitque punctum Z puncti cujuſvis F, in FG ſumpti, imago abſoluta; & ZX ad CA perpendicularis; ac $CA . CR :: I . R$; & $RA . CB :: RC . CE$; & ipſi RE connexæ occurrat XZ protracta ad H; eritque rurſus $XH = CZ$. Fig. 199.

Nam eſt $CA . CR :: (FC \times MZ . FM \times CZ ::) \; FC \times CZ - FC \times CM . FC \times CZ - CM \times CZ$. quare $CR \times FC \times CZ - CR \times FC \times CM = CA \times FC \times CZ - CA \times CM \times CZ = CA \times FC \times CZ - FC \times CM \times CX$. ac indè $CR \times CZ - CR \times CM = CA \times CZ - CM \times CX$. transponendóque $CR \times CZ - CA \times CZ = CR \times CM - CX \times CM$; hoc eſt $RX . CZ :: AR . CM :: RC . CE :: RX . XH$. quapropter eſt $CZ = XH$.

VI. Hinc dilucidè rurſus apparet rectæ FAG imaginem abſolutam (vel ad oculum in centro C ſitum relatam) ſi $RC \sqsubset CE$, *ellipticam* fore; ſin $RC = CE$, fore *parabolicam* (quarum ſectionum pars anterior ETE ad convexam circuli refringentis partem MBN pertinet, poſterior $YEEY$ ad cavam LDL). Quòd ſi fuerit $RC \sqsupset RE$, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbolæ* YTY pars ſuperior ETE ad circuli partem NBN referenda eſt; pars autem inferior $YEEY$ unà cum tota hyperbola $\zeta V \zeta$ ad partes concavas LDL pertinebit. nempe ſi fuerint rectæ CK æquales ipſi CE, tota hyperbola $\zeta V \zeta$ interceptam punctis K rectæ FG portionem referet, ejúſque quod hinc indè protenſum ſupereſt ab ipſa $YEEY$ repræſentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hoſce caſus animadvertere licet poſſe ſectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diverſos circulos concentricos expoſitis repræſentandis inſervire. nimirum in caſu poſtremo, ſi reliquis ſtantibus punctum A indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ $\zeta\upsilon\zeta$, YTY rectas FAG repræſentabunt ad circulos, quorum ſemidiametri CB ipſis AI ſingulæ reſpectivæ ſingulis æquantur, modò ſemper intelligatur eſſe CA.CR::I.R. id quod ſatìs fuerit obiter admonuiſſe.

VIII. Ut & illud curſim innuiſſe ſuffecerit, quòd ſicut à conicis ſectionibus rectæ lineæ, ità viciſſim *conicæ ſectiones* à rectis lineis ex juſta congruos ad circulos inflectione repræſentantur; quos utique non arduum videtur è præmiſſis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ ſectione* circulus & recta facilè deſignantur, ità ut conica rectam illam repræſentet ex inflectione ad iſtum circulum. Nempe ſi à foco C ad axem CV applicetur normalis CE; & recta ER ſectionem tangat ad E; factòque CR.CA::R.I; ducatur per A recta AI ad CE parallela; ſitque CB = AI; tum centro C per B ducatur circulus MBN, peractum erit negotium.

Fig. 201.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac ſitus obtinent, proclivius erit judicare. ſcilicet eæ ſaltem unum (in recta per oculi, circulíque refringentis centrum trajecta poſitum) commune cum abſolutis punctum habent; quoad reliqua verò reſpectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi ſitus peculiaris, & radiorum curſus exigunt; id quod facilius ſit in ſingulis caſibus qualiter eveniat perſpicere, quàm verbis univerſim explicare. ſed enim unam rei declarandæ ſubjiciemus inſtantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii FMO, GNO; ſit autem *ellipſis* TZVY rectæ FG abſoluta imago, quam connexæ FC, GC punctis Z, Y ſecent (ità quidem ut Z ſit puncti F, & Y puncti G imago abſoluta) enimverò, de ſupradictis colligitur punctum K ſupra Z verſus C exiſtere; quinetiam puncti F in recta MO imaginem (puta φ) ultra FZ jacere. Similiter puncti G imago (γ) ſupra Y, ultràque GY ſita eſt. unde conjectura fiet de totius imaginis $\varphi\alpha\gamma$ poſitione, ſeu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in appoſita exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud abſque nimiâ moleſtiâ) juxta theoriam ſuprà conſtabilitam accuratè poterit delineari.

XI. Ità rectarum linearum ad ſphæricam ſuperficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque ſuperficierum ad eandem repræſentationibus haud difficilè ſtatuetur; harum ſcilicet imagines abſolutæ *conoidum aut Sphæroidum Superficies erunt* è rectarum imaginibus reſpectivis circa radiationum axes converſis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum ſuperficierum imagines è rectarum imaginibus relatis ſimili pacto progenerantur. rem totam ipſi mentem aliquantillùm advertentes perſpicietis; me λεπτολογίας extremæ faſtidium capit.

XII. Reſtare videtur, ut quomodò compoſitæ ſuperficies ſphæricæ objectas repræſentant lineas diſpiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ ſint altioris gradûs lineæ, ab uſu notitiàque communi ſegregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis deſudans extricandis. illas itaque tranſiliam; hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium poſitiones è præmonſtratis dignoſci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII. Hæc ſunt, quæ circa partem *Opticæ* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi ſuggeſſit meditatio. circa reliquas (quæ φυσικώτεραι ſunt, adeóqve ſæpiuſculè pro certis principiis plauſibiles conjecturas venditare neceſſum habent) nihil ferè quicquam admodum veriſimile ſuccurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Carteſius*, & poſt illos alii tradiderunt) alienum aut diverſum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam cramben reponere. proinde receptui cano; nec ita tamen ut prorſus diſcedam, anteaquam improbam quandam difficultatem (pro ſinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè diſſimulandam) in medium protulero, quæ doctrinæ noſtræ, hactenus inculcatæ, ſe objicit adverſam, ab ea ſaltem nullam admittit ſolutionem. illa, breviter, talis eſt: *Lenti vel ſpeculo cavo* E B F exponatur viſibile punctum A, ità diſtans, ut radii ab A manantes ex inflectione verſus axem A B cogantur; ſitque radiationis limes (ſeu puncti A imago, qualem ſupra paſſim ſtatuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uſpiam poſitus concipiatur oculus. quæri jam poteſt, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorſum ad punctum Z videri natura non fert (cùm omnis impreſſio ſenſum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. noſtris autem è placitis conſequi videtur ipſum, ad partes anticas,

Fig. 202, 203.

ticas apparens, ab intervallo longiſſimè diſſito, (quod & maximum ſenſibile quodvis intervallum quodammodò exſuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (ſecluſis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abeſſe ſentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotiſſimè poſitum æſtimetur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magìs, ſi fieri poſſet, quoad apparentiam elongetur. quin & circa caſum hunc generatim inquiri poſſit, quidnam omninò ſit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciátque quòd conſtanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* reſponderi poſſe videtur, niſi debere punctum A perpetuò longiſſimè ſemotum videri. Verùm experientia ſecùs atteſtatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z poſitione variè diſtans; nunquam ferè (ſi unquam) longinquius ipſo A liberè ſpectato, ſubindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quò oculum appellentes radii magìs convergunt eò ſpeciem objecti propiùs accedere. nempe, ſi puncto B admoveatur *oculus*, ſuo (ad lentem) ferè nativo in loco conſpicitur punctum A (vel æquè diſtans, ad *ſpeculum*;) ad O reductus oculus ejuſce ſpeciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipſum exiſtimat; ac ità ſenſim, donec alicubi tandem, velut ad Q, conſtituto oculo objectum ſummè propinquum apparens in meram confuſionem incipiat evaneſcere. quæ ſanè cuncta rationibus atque decretis noſtris repugnare videntur, aut cum iis ſaltem parùm amicè conſpirant. Neque noſtram tantùm ſententiam pulſat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimìs ac vulgatam, noſtræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctiſſimus *A. Tacquetus* iſti principio (cui penè ſoli totam inædificaverat *Catoptricam* ſuam) ceu infido ac inconſtanti renunciârit, adeoque ſuam ipſe doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, ſi rem totam inſpexiſſet penitiùs, atque difficultatis fundum attigiſſet. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoúſque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifeſtè rationi conſentanea video, diſcedam; præſertim quum ut hîc accidit, ejuſmodi difficultas in ſingularis cujuspiam casûs diſparitate fundetur. nimirum in præſente caſu peculiare quiddam, naturæ ſubtilitati involutum, deliteſcit, ægrè fortaſsis, niſi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè ſatisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, reſolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi*, *Valeatis*.

FINIS.

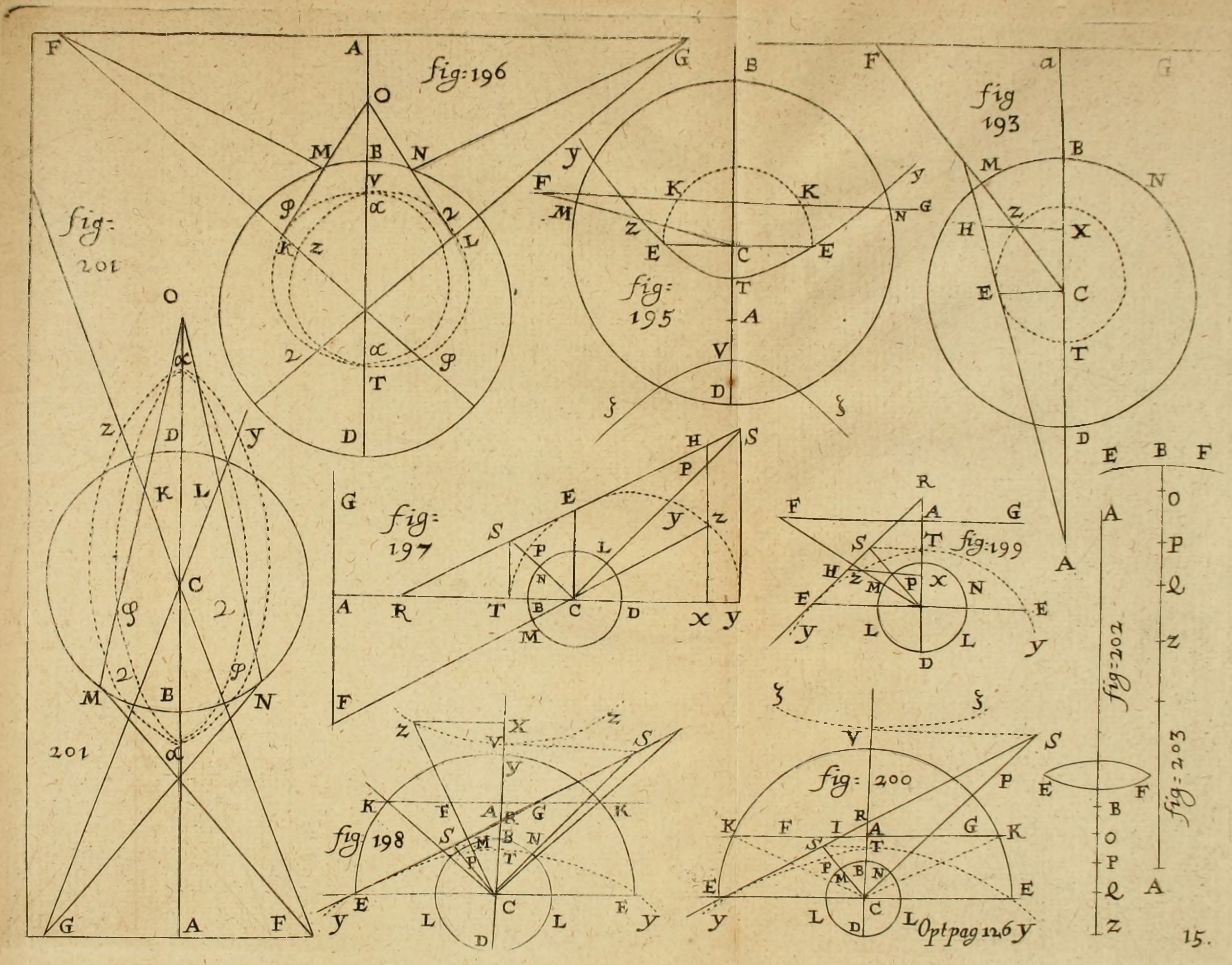


fig: 196
F
A
O
G
M
B
N
V
α
K
z
L
2
T
D
fig: 201
O
α
Z
D
y
K
L
C
2
M
B
N
201
G
A
F
fig: 195
B
y
F
M
K
K
y
G
N
Z
E
C
E
T
A
V
D
fig: 193
F
a
G
B
M
N
Z
H
X
E
C
T
D
A
fig: 197
G
H
S
P
E
S
y
z
L
P
N
A
R
T
B
C
D
x
y
M
F
fig: 199
R
F
A
G
S
T
H
Z
M
P
X
N
E
E
y
L
L
y
D
fig: 198
Z
X
V
z
S
Y
K
F
A
R
G
K
S
M
B
N
P
T
E
C
E
y
L
L
y
D
fig: 200
Y
S
P
R
K
F
I
A
G
K
S
T
P
M
B
N
E
E
y
L
C
L
D
Opt pag 126
fig: 202
E
B
F
A
O
P
Q
Z
E
F
B
O
P
Q
Z
fig: 203
A

ERRATA.

P*Ag*.3.*lin*.25 luce.(præſente, *leg*.luce(præſente p4, l 21, deſceptatur l diſceptatur *ib*.l 31, valeat, id l valeat id p 5, l 31, toto l tota, p 6, l 23, dici l dicitur, p 11, l 10, allas l alias, p 13, l 27, proximo l proximos, p 14, l 12, contraniſmum l contraniſum, p 14, l 16, effectant l affectant, p 15, l 14, nobile l mobile, p 16, l 20, in quæ l in iis quæ, p 17, l 3, ſubſtracto l ſubſtrato, p 17, l 5, citentur fig 10, p 17, l 20, fig 12 l fig 11, p 18, l 11, fig 13 l fig 12, p 19, l 17, tranſmitti l tranſmittit, p 22, l 21 προλεπτικῶς l προληπτικῶς, p 23, l 6, incidentes (radios l incidentes radios, p 23, l 19, S B protracta l S B (protracta, p 28, ambages. I. Demonſtratæ proſtant l ambages demonſtratæ proſtant. I. Ut in P*arabola*, p 29, l 25, citentur fig 29, p 29, l 30, puncto divergentium tanquam l puncto divergentium radiorum reflexi rurſus divergunt tanquam, p 29, l 32, ſuo l ſeu, p 32, l 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, p 33, l 4, citentur fig 36, *ibid*. l 6, citentur fig 37 & 38, p 38, l 28, I q. R. A B. Γ l I q. R. & A B. T p 40, l 17, Sc l Si, *ib*. l 33, quoquam l quaquam, p 41, l 24, abeoque l adeoque, p 45, l 7, reciſſimi l rectiſſimi, *ib*. l 8, propriores l propiores, p 47, l 24, reſignare l deſignare, p 48, l 1, Z 2, l 2. *ib*. l 12, Nocetur ſi ſuerit H N P l Notetur ſi fuerit H N ϖ, p 57, l 4, ejuſce l cujuſce, p 65, l 4, exiſtimari l exiſtimare, *ib*. l 22, ipſe l eſſe, p 67, l 13, interjaceret l interjacet, p 70, l 3, poſteribus l poſterioribus p 71, l 32, Adverſatur l Advertatur, p 71, l 15, γ S γ v l γ S. γ v. p 78, l 1, in eodem l eodem, p 89, l 25. ratiori l rariori, p 90, l 17, expanſem l expenſam, p 95, l 14, relectionibus l reflectionibus, *ib*. l 40, Sinus l Simus, p 96, l 3, ſimplicime l ſimpliciſſime, p 97, l 8, quæſitam l quæſitum, p 105, l 28, Poſito l Poſitio, p 112, l 26, admodum l ad modum.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem ſanè neſcio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) neceſſariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; ſeu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum ſpecies. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta poſſit, & reverà produci. Poſſunt autem, qui ſaltem hactenus uſurpati ſunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum ſe mihi jam cogitanti ſuggerentia ſunt hæc; *per motus locales; per interſectiones magnitudinum; per quantitate poſitionéque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum; per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis; per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & ſi qui ſunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo ſupponant oportet, utpote ſine quo nil procreari poteſt, eſt iſte, *qui per motum localem*. De quo proinde primo diſpiciendum. De motu celebratur illud *Ariſtotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motn neceſſariò naturam ignorari; in Phyſicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (ſaltem quantùm humanus intellectus aſſequi valet, aut experientia commonſtrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non abſque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de cauſis, de differentiis complura ſubtiliter argutantur Phyſici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi* — 3 *Phyſ. I.*

vel curæ. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimìs generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magìs retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ qnæ velim quam primùm ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditiùs fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe, ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter duraſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit, pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coëxiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ità priùs mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantùm ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimè dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perdurâſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ità motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per ſe quenquam tempus ſentire fatendum eſt
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philoſophus ipſe*; Ὅταν γὰρ αὐτοὶ μηδὲν μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι χρόνος. Phyſ. IV. 16. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à ſomno excitatis quantum temporis interceſſit; at non hinc rectè colligitur, φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non perſentiſcimus, ergò non eſt, illatio fallax, & fallax ſomnus, qui fecit ut nos duo ſemota temporis inſtantia connecteremus. interim veriſſimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitiſſe; neque quum tantum tempus dicimus, aliud conſuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuiſſe, cujus ſcilicet extenſioni continuò ſucceſſivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo ſemper æquali, non per vices nunc ſegniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admiſsâ ſiquidem illâ diſparitate nullam omninò computationem, aut dimenſionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoſcendæque temporis quantitati cenſeatur accommodatus, at is præſertim qui ſummè ſimplex & uniformis æquabili ſemper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum eſt, quod ſaltem quoad motûs ſui periodos æqualem conſtanter impetum ſervat; & per æquale ſpatium decurrit. Et ad communem quidem uſum accipiendus eſt ejuſmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & ſenſus omnium incurrens, qualis eſt motus ſyderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè ſibi per omnia conſtans, & orbi terrarum conſpicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ ſuffragio deputatus, at divino Creatoris conſilio aptus natus eſt huic uſui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cœli, & dividant diem ac noctem, & ſint in ſigna, & tempora, & dies, & annos.* Gen. I. 14. At quomodò, dices, cognoſcetur *æquabili ſolem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æquitemporaneum eſſe?* Reſpondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino teſtimonio colligatur) nobis innoteſcere, quàm cum aliis æquabilibus motibus ipſum ſolis motum contendendo. Si nempe deprehendatur ſolis motus in horologio ſolari (quod ſpatiorum à ſole in circulis æquatori parallelis percurſorum penè certò ac exquiſitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujuſvis horodeictici, ſatìs accuratè conſtructi, motibus conſentire. Talis enim machina è fabrica ſua comparata eſt, ſecundum motûs ſui repetitiones ſuccedaneas, æqualiter moveri; *Clepſydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ deſtinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem ſuam, & figuram, vímque deſcendendi prorſus eadem manet; nec non vaſculum continens, & meatus ipſam tranſmittens haud omnino variantur, tantillo ſaltem tempore, pérque temperiem aëris conſimilem, nec ideò cauſa ſubeſt ulla, cur non æquales in ſingulis effluxibus motus obire concedatur; ergò ſi compertum ſit, Solares motus, ſeu quoad integras periodos, ſeu quoad partes ipſarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquiſitè congruere, meritò pronunciandum eſt, eos prorſus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo diſcurſu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cæleſtia corpora non eſſe, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis menſuras; aſt illos potiùs motus, qui prope nos ſenſibus obverſantur, & experimentis ſubjacent noſtris, cùm horum ope cæleſtium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipſe Sol temporis idoneus judex, aut teſtis αὐτόπτης eſt, niſi quatenus horariæ machinæ ſuffragio veracitatem ſuam adteſtatur. Nec ſanè, quod obiter interpono, poteſt ullo pacto ſciri num periodi ſyderum ante multa ſecula tranſcurſæ noſtri ſeculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo ſcilicet aſſerat certò *Methuſelam* illum qui tantùm non mille vitæ tranſegit annos, eo fuiſſe reverà μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, ſi Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos ſuas evolverat? Quid ſi tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipſa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum noſtri temporis inſtrumentis comparata fidem ſuam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, exiſtimâſſe dicitur Solem initio dies longè prolixiores effeciſſe. Sed minùs id rationi conſentaneum videtur, quia tales motus vertiginoſi ſenſim elangueſcere potiùs ſolent, quàm invaleſcere. Verum obiter hæc, & vix ſeriò; revertamur in orbitam. Temporis (ſeu permanentiæ rerum in ſuo eſſe, ſtatu, motúve) quantitas, ut dictum eſt, à motu quolibet dignoſcitur, bene notorio, æquabili, (ſeu quoad partes ad hoc adhibitas ſibi conſtanter æquali ac ſimili) dein ſecundariò è quibuſvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correſpondent, è cæleſtibus imprimìs, Solis potiſſimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora ſint, in quibus eadem clepſydra ſemel ac iterum, vel æquè multis viſibus exhauritur; aut in quibus eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adſumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minùs tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum ſit diſcimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimamus; ità tempus primò taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles*: οὐ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ Phyſ. IV. 18. καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem aliàs quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quòd aliquatenus diviſibilis ſit, à motu verò quòd uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ità tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quòd eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum exporrecta ſucceſſione; quam ſpatii decurſi longitudo demonſtrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam ſemper deſignabimus; arbitrariè quidem initio ſumptam & expoſitam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis inſtantibus reſpectivis juſtè reſpondebunt, & iis appoſitè repræſentandis inſervient. His de tempore prælibatis ad conſiderandam vim motûs effectivam procedimus, quæ ſanè (quæcunque ſit ejus natura, vel undicunque procedat, nam iſta *Phyſicis* diſquirenda relinquimus) merito quoque ſeu quantum quid concipitur, & ſicut alia quanta computo ſubjicitur. Etenim experientiâ compertiſſimum eſt, ſæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, ſeu majus eodem tempore ſpatium conficere. Nec aliunde poteſt hoc procedere, quàm à majori vi, ſeu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúſque gratiâ velocius dicitur. Et quia perſpicuum eſt nil impedire, quin ſecundum omnimodas proportiones contingat hic ſpatiorum unà peractorum exceſſus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaſlibet (quas & ſicuti partes cujuſcunque qualitatis intenſivas ſuccinctæ diſtinctionis ergò gradus appellare licet, & conſuetum eſt) in partes, inquam, quaſlibet infinitas, aut indefinitas diviſibilis concipiatur; quas inter ſe nectens, & à ſe dirimens communis terminus, vel (juxta ſuppoſitionem quòd quanta conſtant ex infinitis atomis) pars abſolutè minima dicatur quies, hoc eſt ſumma tarditas, aut infima velocitas; è cujus ſuccreſcentia, vel intenſione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appoſitione, vel motu, tempus ex inſtantium ſucceſſione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem abſolutè conſiderando, quo vis hujuſce quantitas menti ſeu phantaſiæ rectè proponatur, ſufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc eſt talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) ſimplicitatis adeò perſpicuitatiſque causâ cuilibet ejus repræſentando gradui recta linea cum primìs accuratè quadrat. Ità quidem in ſe generatim & abſoluta ſpectata vis iſta tempus non implicat, eóque ſecluſo concipi poteſt (in quolibet enim temporis inſtanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æſtimio Mathematico ſubdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum ſpatio tempus adſignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac diſcernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile ſpatium aliquod in aliquo tempore pertranſire poteſt. Uude conſectatur ſingularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimo ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant ampliùs exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ita perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hìc mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis inſtantia prorſus æqualia ſint inter ſe, ſpatialium longitudinum ratio à ſola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut ſimilis (quod niſi pro veriſſimo ſumatur, haud ullo modo menſurari poſſit velocitas; nam à ſola ſpatiorum eodem tempore decurſorum (vel eodem inſtanti) proportione velocitatum inter ſe collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius reſpectu denominatur tanta) ſimiliter ſi per omnia temporis cujuſvis momenta qui conveniunt ipſis velocitatis gradus aſſignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibuſvis decurſorum ſpatiorum partes reſpectivæ, hoc eſt iiſdem temporibus reſpondentes particulæ, juſtè proportionantur, adeóque quantum è gradibus iſtis conſtans repræſentans magnitudo ſpatium quoque decurſum repræſentare poſſit; quatenus nempe qualem ſpatii partes temporibus ſingulis peractæ proportionem inter ſe ſervant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabiliſſimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptiſſimè repræſentetur, & qui in ſingulis temporis inſtantibus habentur alii ac alii, ſibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut priùs etiam inſinuatum eſt, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus ſingula temporis momenta alii ac alii permeent, independentèr à ſe invicem ac impermixtè; itaque ſi per lineæ tempus repræſentantis omnia puncta trajiciantur rectæ ſic diſpoſitæ, ut altera nulla nulli alteri coïncidat, hoc eſt in ſitu parallelo; quæ reſultat hinc ſuperficies plana (pro quantitate temporis, & poſitorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactiſſimè referet; cujus ſuperficiei partes cùm reſpectivis (ut prædictum) ſpatii peracti partibus proportionales ſint, poterit id ſpatio quoque repræſentando commodiſſimè adaptari. Iſta verò ſuperficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel ſpatii repræſentativa. Neque quenquam afficiat, nam ſubmovenda nobis hæc remora, quod diximus in ſingulis temporis inſtantibus longitudinem aliquam confici, quaſi dari poſſe motum inſtantaneum affirmarem. Nam poſito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd ſi lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, ſibimet æquinumeris, neceſſariò ſequitur linearum puncta, juxta ſimilem cum ipſis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decurſas duntaxat intelligenda ſunt ejuſmodi inæqualia puncta, è quibus tota decurſa longitudo quaſi conflatur. Sin hoc abſonum cuipiam videatur, & nullo ſenſu motus admittatur inſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem priùs expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem Fig. 1. rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eíque parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contráque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ σκέψει ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis Fig. 1. inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt C Y Y E, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ faciliimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demon-

Fig. 2.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt A E X, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, linea B X primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima C X ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens D X (qui ſe habet ut 9.) & ita porrò uſque ad ultimum E X: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totíque motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

LECT. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggreſſi modos conſiderare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm vero ſoleant *Mathematici* diverſimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines reſultant, motus adſumere ceu poſſibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus iſtæ motuum differentiæ ſcaturiunt, modum lationis ipſum, & quantitatem vis motivæ; quorum poſteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati ſumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas aſſumunt ipſas proſequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inſervire poſſunt oſtendemus. Lationis modum ſpectando generantur magnitudines vel per motus ſimplices, vel per motus compoſitos, vel ex concurſu motuum (nam compoſitionem à concurſu diſtinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De ſimplicium motuum hypotheſibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera ſunt, φορὰ, & περιφορὰ, progreſſio, & circumlatio. Sub progreſſivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) reſpicit, cui velut innectitur, ac affigitur; ſeu directus iſte motus ſit, ſeu reflexus, ſeu refractus; ſive callem certum perſequatur, ſive inconſtanter deſultet, divagetur, exorbitet. Quia verò penitus irregularium in arte nulla ratio poteſt haberi, ſufficit *Mathematicis* ſupponere magnitudinem quamcunque progredi poſſe juxta deſignatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quòd punctum *in linea recta*, *circulari*, *elliptica*, *ſpirali*, *vel alia quavis præſtituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc eſt maximi, frequentiſſimíque pro magnitudinibus efformandis uſûs, circa hujuſmodi motus quas *Mathematici* præſtruunt hypotheſes, ſunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quouſque libuerit adſignare directè progredi queat, quali motu perſpicuum eſt lineam rectam deſcribi: Quòd linea recta per alterius cujuſvis lineæ longitudinem ità procedere poſſit, ut ſitum interea parallelum perpetuò ſervet (hoc eſt ut ipſa juxta poſitionem, quam in quolibet temporis momento ſortitur, parallela ſit ſibi ſecundum poſitionem ſuam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protenſa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem ſibi parallelo, progredi poſſit (directo inquam, hoc eſt ut ejus ſingula puncta lineas rectas deſcribant) qui ſanè duo motus ſibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur ſuperficies; quales ſunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (ſeu penitus rectilineæ, ſive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non Fig. 3. in uno plano delineatæ) *Superficies Priſmaticæ, Cylindricæque*, tum quæ ſtricto, tum quæ latiori ſignificatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui inſiſtens recta A B per ipſam B C feratur, ſibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipſi D C ad A B parallelæ congruat. Manifeſtum eſt hujuſmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet aſſumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam deſcribere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per eaſdem reſpectivè rectas A B interceptis (hoc eſt eodem tempore à puncto B decurſis) æquantur. Neque minùs patet, ſi vice verſâ recta B C per ipſam B A feratur, eandem ſuperficiem Fig. 4. delineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas reſpectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in ſimilibus caſibus harum linearum illam, quæ motu ſuo magnitudinem deſcribit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui inſiſtens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ proceſſus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Fig. 5. Sit rurſus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano inſiſtat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, ſibimet æquidiſtans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipſam A B primò poſitam parallelæ congruerit; deſcribetur hoc motu figura quoque plano (latiore ſignificatu) parallelogramma; quia ſcilicet adverſa hujus figuræ latera ſibi parallela ſunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hìc ſingula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas deſcribent *directrici* B C ſimiles & æquales; cùm integras, tum iiſdem parallelis A B interceptas partes; ſi enim duo puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iiſque reſpondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B ſibimet æquantur (etenim nil aliud ſunt, quam eadem ipſa linea diverſum ſitum obtinens) ac parallelæ ſecundum *hypotheſin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari ſibimet, & aſſimilari. Adæquari quia ſubtenſæ omnes EE ſubtenſis B B ſingillatim æquantur; aſſimilari, quia rectæ A B cum ſubtenſis adjacentibus reſpectivis E E, & B B pares angulos conſtituunt, adeóque rectæ ipſæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipſæ illæ cum ſeipſis, & hæ cum ſeipſis (nam in hujuſmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, ſicut alibi fortaſſe luculentius & fuſiùs diſſeremus, omnis conſiſtit linearum, & quarumcunque magnitudinum ſimilitudo.) Quòd ſi vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc eſt ſi B C per B A ſibi parallela feratur, producetur eadem ipſiſſima parallelogramma Superficies; & ſingula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas deſcribent; neque non interceptæ F F reſpectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex ſuppoſito perpetuo curvæ BC paralleliſmo facilè conſectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus compoſita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* ſaltem è rectis compoſitas lineas, utì figurarum circulis inſcriptarum aut adſcriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & viciſſim curvæ quævis lineæ cenſeri poſſunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps ſecum angulos efficientibus, conflatæ) ſit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis conſtituta, tum in alio plano, vel ſuper lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B ſibi continuò feratur parallela, modo quo ſemel ac iterum oſtendimus; deſcribetur hujuſmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *priſmatica*, ſi *linea directrix* è rectis ponatur compoſita) & *cylindrica* quidem ſtrictè dicta, ſi *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò ſenſu talis, ſi curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis ſingula puncta ſimiles & æquales deſcribunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente diſcurſu) quoniam E B pares ac parallelæ ſunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; ſimiles; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè deſcribatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelas deportari. Quomodò ſingula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis reſpectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonſtratum eſt; unde ſi ſuperficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam ſeu genetricem, ſeu directricem (quam ubique ſitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo ſecetur, ſectio communis duabus rectis parallelis conſtabit æqualibus inter ſe. De Superficiebus autem ità progenitis obſervatu dignum eſt (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, ſed & generales nonnullas ipſarum affectiones è diverſis reſultantes generandi modis inſinuare propoſitum eſt nobis) quòd ſi linea directrix recta ſit (ut in figura per literam Z diſcriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ reſpectivis directricis lineæ partibus ſemper proportionales ſunt (ſuperficies nempe B C C B reſpectivis rectis B B:) At ſi linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non ſemper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at ſaltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel ſecundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuſcunque, laxè vel ſtrictè dicti, recti ſuperficie; quia tum recta Fig. 6. genetrix omnibus curvæ punctis (hoc eſt omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, eíve ſubtenſis rectis eſt perpendicularis.) Verum ſi, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt neceſſariò ſuperficies A B B A peripheriis æqualibus B B inſiſtentes inter ſe pares, quia (præterquam in caſu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum ſubtenſis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *inſuperabilis iſta difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas ſuperficies conantur dimetiri, ſeu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliiſve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique conſimili pacto ſuperficiem quamvis planam directo motu ſibi parallelo progredi, ſcilicet ut prædicto modo, ſingula ipſius puncta lineas rectas deſcribant, inter ſe pares, ac parallelas; vel ut ejus ſingulæ rectæ (id quod indè conſectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujuſmodi motu deſcribuntur priſmatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipſa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúſque ſimili jure poſſunt adaptari, quæ Superficiebus iſtis oſtendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipſorum, & ipſa corpora lateribus ſuis (ſeu directricis rectæ partibus reſpectivis) proportionantur. Quòd & ſi definita hujuſmodi corpora planis laterum alicui parallelis ſecentur, communes ſectiones erunt *Parallelogramma* (quale eſt E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Priſmaticis ac Cylindricis ſtrictè dictis generatim enunciantur aut probantur uſpiam*, quòd ea pleraque juſtam analogiam obſervando, univerſis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progreſſivo motu quidpiam ſuccurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα conſultò videntur reticenda. Porrò ſimplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Matheſis*, eſt *circumlatio*, *ſeu motus converſivus*; qui tum ſcilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum conſiſtit, dum ei velut innodata ac adſtricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis aſſignatam directionem, circumagitur. Cujuſmodi motûs generaliſſima proprietas eſt, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano tranſversè moventur, circulares ſingula peripherias deſcribant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum tranſeunte plano moventur parallelas, ſeu concentricas, & ſimiles inter ſe; quæ vero in diverſis planis ſimiles, aut diſſimiles, prout hypotheſium exigit arbitraria diverſitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis eſt circumlatio, cùm ſingula mobilis puncta circulares unius ejuſdem circuli peripherias deſcribunt, hoc eſt cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipſa natura ſponte concipit atque proſequitur, cùm nè rectos ſuos quos præſertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appenſorum motibus videre eſt; imò cùm objectâ quâvis reſiſtentiâ non ſatis facilè recto tramiti valet inhærere; ſicut in *rotarum*, & *verticum*, & *turbinum*, & *in ipſorum fortaſſe ſyderum*, *motibus adparet*. Verùm hujuſmodi motuum generalem indolem haud ità promptum eſt verbis explicare. Præſtat ipſas quas accipiunt præcipuas hypotheſes percenſere. Aſſumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipſa fixum poſſe circumferri; cujuſmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias deſcribere; ſingulas ab uno quovis deſcriptas ſingulis ab altero quolibet ſimul eodem tempore deſcriptis parallelas, & ſimiles. Ut ſi linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, ſingula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B ſibi parallelas, & ſimiles omnes (iiſdem nimirum, aut æqualibus angulis ſubtenſas, quorum commune centrum, aut vertex C) deſcribent. Hoc autem modo conſtat procreari circulos, & ſectorum circulares areas (quales ACA, BCB,) ſed & annulos planos; qualis eſt is qui reſtat, ſi è circulo

Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua geneſi colligitur circulorum, & ſectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac ſimilibus, conſtare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum ineundo circularis areæ talis qualis dimenſio quam facillimè reperitur; id quod non eſt hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam ſupponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protenſam, uno manente fixo ipſius puncto circa deſignatam quamvis in alio plano conſtitutam lineam, curvam aut è rectis compoſitam, revolvi, ſic ut Fig. 8. ei nempe lineæ ſemper inſiſtat, vel eam quaſi lambat, aut perſtringat. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protenſa, & in ea fixum punctum V; & per V ſemper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ita quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujuſmodi motu producetur curva Superficies (è planis ſaltem compoſita, quam & generali ratione, poſt *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem ſi linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; ſin circularis fuerit, aut conicarum ſectionum aliqua, Superficies evadet ſtrictè *conica*; ſin alterius generis aliqua, conica ſaltem extenſo latiùs ſignificatu dicatur; & à quibuſdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas eſt, ex ipſa generatione manifeſta, quòd ſi per fixum punctum V plano ſecetur, communis plani cum ipſa ſectio erit angulus rectilineus. Nam ſi planum ipſam ſecans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipſam non ſecaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano ſecante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos tranſit, ipſiſque proinde coincidit. In hujuſmodi verò motu poſito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (ſeu vertice) ad directricem lineam B C ductæ ſunt inæquales inter ſe, ſatìs liquet lineam B C non à lineà B delineari, vel perambulari, quia Fig. 8. lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) ſibi nequeunt congruere; adeòque punctum B progrediens ſupra, vel infra puncta B, E, C cadet; ut nec eâdem inæqualitate ſuppoſitâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu ſuo lineam deſcribet lineæ directrici B C ſimilem (quare linea V B ſupponitur indefinitè protenſa) at verò ſi lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci poſſunt (quas Superficiei propoſitæ latera nuncupemus licet) proportionaliter ſecentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo ſita eſt B C, parallelo) diviſionum puncta lineam conſtituent, ſaltem ad lineam conſiſtent, ipſi B C ſimilem. Ductis enim quotlibet lateribus V B, V D, V E, V C, & ducto plano G K L H ad planum B D E C parallelo, ſint communes plani V B D cum planis B C, G H ſectiones rectæ B D, G H; 16. XI. Elem. hæ parallelæ erunt. Item communes plani V D E cum iiſdem planis B C, G H Sectiones D E, K L parallelæ erunt. Ergò anguli B D E, G K L ſunt æquales. Item ſe habet recta B D ad G K, ut D E ad K L, quia utraque hæc proportio æqualis eſt illi, quam habet V D 10. XI. Elem. ad V K (ſimilia quippe ſunt triangula V D B, V K G, & triangula V D E, V K L) permutandòque B D . D E : : G K . K L. ergo omnes ſubtenſæ in G H proportionales ſunt ſubtenſis omnibus in B C, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ ſibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ ſibi adjacent in altera. Ergò ſecundum ſuperiùs inſinuata lineas B C, G H ſimiles eſſe conſtat. || Hinc etiam patet lineas curvas ſimiles B C, G H eandem ad ſe proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta ſita, latera V B, V G. Quum enim ſubtenſarum iiſdem angulis incluſarum (ut B D, G K, vel D E, K L) ſingulæ rationes æquales ſint rationi laterum V B, V G; etiam omnes antecedentes 12. V. Elem. conjunctæ (hoc eſt tota B C) ad omnes conſequentes conjunctas (hoc eſt totam G H) ſe habebunt ut V B ad V G. Hinc etiam tali motu productarum ſuperficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ ſcilicet à parallelis ad B C planis, à vertice deſumptæ, quibuſcunque lateribus iiſdem incluſæ partes ipſarum ſint inter ſe ſimiles; ut puta Superficies B V C, G V H; & B V D, G V K. (Quod ex generali ſimilitudinis doctrina poſthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex ſimilitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúſque conſimili Superficierum generatione ſatìs eluceſcit; ſaltem ex triangulorum V B D, V G K; & V D E, V K L, & talium omnium ſimilitudine ſatìs conſtat; ſiquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies compoſita cenſeatur.) Unde ſimilium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diverſis lateribus Superficies, eas inter ſe comparando, notandum eſt quòd baſibus ſuis, ſeu directricis lineæ reſpectivis partibus non ſemper proportionales ſunt; at ſaltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera ſunt æqualia inter ſe, adeóque cùm linea directrix eſt peripheria circuli; quo caſu producta Superficies erit conica Superficies ſtrictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quod ſi directrix B C ſupponatur e. g. peripheria circularis, lateráque ſibimet inæqualia, ſi dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter ſe, ſed inſcrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum incluſorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torſit, *qui dimetiendæ coni ſcaleni ſuperficiei incubuerunt.* || Ex his conſectatur quòd poſſit hujuſmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ita ut ejus ſingula quæque puncta parallelos lata ſimiles directrici lineæ lineas deſcribant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari ſecundum omnes ſui partes. Quomodo nempe ſi recta V B ita ſenſim diduci concipiatur, ut punctum *B* totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipſi B C ſimilem deſcribet. Quinimò ſi conſimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu ſitúque ſemper ad ſeipſam parallelo concipiatur promoveri, ſic ùt ejus ſingula quæque puncta lineas rectas deſcribant, ſecum omnes in punctum V concurrentes; hoc eſt ità ut ipſa per totum ſuum progreſſum juxta ſuas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem uſque V; producentur ex hujuſmodi motibus Superficies conicæ prorſus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujuſmodi motus imaginarii ſunt, & quales rerum natura reſpuit. Explicandæ tamen hujuſmodi Superficierum naturæ deſervire poſſunt, & ſupponi ſaltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, ſi *linea directrix* in motu proximè memorato ſupponatur undique clauſa, ſic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu baſe, corpus ſolidum includet pyramidale, vel conicum (ſtrictè vel laxè pro dictæ figuræ natura ſumptum) cujus generalia ſymptomata ſatìs è dictis eluceſcunt. Nempe quòd à parallelis ad hujuſce ſolidi baſin planis abſcindentur ſimiles ad verticem Superficies, ſimiléſque baſes intercipientur, & ſimilia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, ſervatâ debitâ analogia, convenient, & ſimili ferme modo demonſtrabuntur convenire. || Verùm uſitatiſſimus apud Mathematicos corpora progignendi modus eſt is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit ſuppoſito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipſius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipſi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipſe *Cylindrus rectus*; ex motu cruris unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipſe deformatur; eóque pacto *cùm integræ cum ſuis Curvis Superficiebus Solidæ magnitudines innumeræ, tum ipſarum portiones, fruſta, tubi, annuli procreantur.* Cujuſmodi motûs hæc præcipua proprietas eſt, quòd ſingula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta ſit revolutio, ſeu mobile denuo primum in ſitum reſtituatur, at ſimiles utcunque ſibi mutuo, quæ ſimul deſcribuntur) quarum omnia Centra ſunt in dicto axe, radii verò ſunt rectæ ab ipſis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili ſitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (ſi revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares ſimiles ſectores, illos intelligo qui ſimul eodem tempore delineantur. Ut ſi v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quaſi peripheriis conſtans (*Atomiſtarum* enim phraſin facilitatis, perſpicuitatis, brevitatis, addere licet & veriſimilitudinis causâ non illibenter uſurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ ſunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii ſunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd ſi revolutio tantum eouſque continuatur, donec V A D ſit in ſitu $V\alpha\delta$, conſtabit *effecta Superficies* ex arcubus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, ſimilibus inter ſe eodem modo ſi planum V D Z circa axem V K revolvatur, poſito quòd integra peragatur converſio, producetur Solidum quaſi conſtans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y, quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; poſitóque quod circulatio deſiſtit in ſitu $\delta\upsilon K$, conſtituetur Solidum è Sectoribus $AZ\alpha$, $BZ\beta$, $CZ\gamma$, & reliquis inter ſe ſimilibus. Cæterùm prætermittenda non eſt animadverſio quædam perquam utilis, & neceſſaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo reſultantium dimenſiones inveſtigandi juxta methodum indiviſibilium, omnium expeditiſſimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non ſemel, in pererudito ſuo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctiſſimus A. Tacquetus*, eóque ſe putat illam deſtruere, quòd per eam inventæ *conorum, & ſpherarum ſuperficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimenſioni non reſpondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta tranſire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur.

| K

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

ponitur ipſum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios deſcriptis ipſe *conus* conflatur. Ergò, diſputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adverſari; methodúſque proinde fallax eſt. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* conſtant computatione diverſam inſtituendam eſſe rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *planæ ſuperficies* conſtant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam conſtituentium è revolutione prognatam lineæ V D cenſeri debet è multitudine punctorum, quæ ſunt in ipſa Fig. 10, 11, 12. linea genetrice V D; quippe cùm per ea ſingula puncta tales peripheriæ tranſeant, nec plures tranſire queant; quicunque ſit axis, ſeu longius diſtans, ſeu propiùs adjacens; axis enim ſolummodò, pro longiore vel propiore diſtantia poſitionéque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K ſupponitur conſtare, planorúmque quibus Solidum D V Y conſtat, è numero taxanda eſt punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipſi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci poſſunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod obſervando *diſcrimen* (ſedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujuſmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo, reor, omnium quos rei natura ſubminiſtrat modo perquiremus.* Illum commonſtrabo. Pro reperienda v. g. dimenſione *curvæ ſuperficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipſa V D in directum extendi, ità ſcilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipſi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; ſingulæ ſingulis, puta A X ipſi A Y, & C X ipſi C Y, ac ità continuò. Erit ex his parallelis rectis conſtitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ ſuperficiei*; hujúſque partes illius partibus reſpectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipſarum reſpectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; ſpatium ex his rectis conſtitutum (quæ ſanè proportionali cum alteris ſerie procedunt) ſe habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujuſvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde ſiquâ ratione deprehendi poſſit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta tranſeuntium* (hoc eſt ſi *ſpatii V D Z dimenſionem* reperire contigerit) eo ſtatim innoteſcet *curvæ Superficiei dimenſio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

plicentur rectæ A Z, B Z, C Z, D Z ad ipſam V D perpendiculares, & æquales ſingulæ ſingulis in cono circulorum radiis per eaſdem literas deſignatis; fiet autem in hoc caſu *Spatium* V D Z triangulum, quia rectæ A Z, B Z, C Z æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium eſt. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine V D & baſe D Z, dimenſio in promptu eſt. Quod ſi fiat *ut circuli radius : Ad circumferentiam ipſius, ità triangulum V D Z ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propoſitæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaſlibet hoc modo natas) inveſtigare licet. At mihi propoſitum eſt generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum geneſin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iſte modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) ſimiles innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta ſe ſitu diſpoſitæ taliter conſtituuntur, ut ſingulæ centrum ſuum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem ſubit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, ínque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam conſiſtunt; quæ propterea dicitur ipſorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* exiſtunt. Sed cùm motus ità diſtortos natura non capiat (ſaltem juxta modum operandi ſimplicem quem nunc ſupponimus) & quia poſſunt hujuſmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abſtinebimus. Neque non de magnitudinum per motus ſimplices effectione ſufficiet hactenus diſſeruiſſe. ||

Lect. III.

Quomodo per *motus ſimplices progreſſivum*, *& converſivum ffectæ concipiantur magnitudines*, *& qualia generationes iſtas conſequuntur ſymptomata* (nonnulla ſaltem præcipua) *conniſi ſumus exponere ad compoſitos nunc*, *& concurrentes*, *eidem propoſito ſervientes*, *motus accingimur*; quorum in effectis diſcernendis velocitates, ſecundum quas ſimplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis conſiderandæ ſunt; quarum in generatione per motus ſimplices nulla prorſus habetur ratio. Per eundem enim motum ſimplicem ſeu velocior is ſit, ſeu tardior eadem magnitudo, quamvìs non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejuſdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvìs ut hæc fiant eò magìs aut minus expectandum ſit, quo ſegnior aut citatior ſupponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compoſitos iiſdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum ſpecie, ſed etiam quantitate diverſæ magnitudines emergere ſolent, poſitione ſaltem perpetuò differentes. Ut ſi recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & ſimul punctum M in A B deſcendat uniformiter; vel ſimul recta A C parallelo quoque uniformi motu deſcendens ipſam A B promotam interſecet in M; ex ejuſmodi motuum compoſitione vel concurſu producetur recta linea A M. Quòd ſi eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C ſecet ipſam A B in μ, deſcribetur hoc motu alia recta A μ à priore A M poſitione diverſa. Sin vero, manente rurſus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi ſubſtituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejuſmodi compoſitione, vel concurſu fiet linea parabolica

Fig. 13.

parabolica A M X vel etiam aliter poſita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd ſi quâpiam aliâ ratione creſcere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypotheſis*, diverſa ſpecies magnitudinis. In his conſpicitur exemplis quod eodem ſubinde recidant *compoſitio motuum et concurſus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuſpiam parallelo motu latæ ſingula puncta rectas deſcribunt ſibi parallelas; unde fit ut perinde ſit an punctum ejus aliquod in ipſa fixum deferatur cum ea, vel ſolutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At ſæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, ſit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc eſt, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et ſimultaneè punctum M ab A in ipſa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex iſta *motuum* compoſitione linea quædam producetur, *helix* ſcilicet *Archimedea* (nam talia conſultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam inſinuem*, et inſtillem minùs ad hæc exercitatis; id tranſcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium Fig. 14. concurſus, liquidò commodéque ſatis explicetur; ita nimirum ut motuum iſtorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, ſeu linearum, ratio, quantitaſve dignoſcantur. Generari quidem poterit è concurſu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concurſu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ ſit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè conſtabit. E contrà, ſi recta BA circa Centrum B motu rotetur Fig. 15. uniformi; et ſimul recta AC per AB parallelωs, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum interſectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici ſolet) cujus generatio non ità clarè per ſtrictè dictam motuum compoſitionem expediatur, aut explicetùr. Generari quidem poteſt per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelωs ad primò poſitam AB; vel ex puucto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A verſus B, vel à B verſus A decurrentis; ſed hujuſmodi ſuppoſitâ quâpiam motuum compoſitione, quænam ſit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hoſce motus determinantium quantitas, aut inter ſe relatio, difficulter innoteſcat. Qua præcipuè de cauſa motuum compoſitionem ab ipſorum concurſu ſecerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modo faciliùs explicatur. Verum ad illos diſtinctius exponendos accedo. De compoſitione primum. Cùm autem motus duobus modis compoſitus intelligi poſſit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de poſteriore nos diſſertamus; quem fortè non meliùs quàm prænobilis Philoſophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Carteſ.princ.II. 31, 32. ‘‘Etſi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm unum motum ſibi proprium, quoniam ab unis tantùm corporibus ſibi contiguis, et quieſcentibus recedere intelligitur, participare tamen etiam poteſt et de aliis innumeris; ſi nempe ſit pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut ſi quis ambulans in navi *horologium in* pera geſtet, ejus horologii rotulæ unico tantum motu ſibi proprio movebuntur; ſed participabunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus adjunctæ ipſi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipſi terræ, ſiquidem tota terra moveatur. Omneſque hi motus revera erunt in rotulis iſtis, ſed quia non facilè tam multi ſimul intelligi, nec etiam omnes agnoſci poſſunt, ſufficiet unicum illum, qui proprius eſt cujusque corporis in ipſo conſiderare. Ac præterea ille unicus cujuſque corporis motus, qui ei proprius eſt, inſtar plurium poteſt conſiderari; ut cùm in rotis curruum duos diverſos diſtinguimus, unum ſcilicet circa ipſarum axem, et alium rectum ſecundum longitudinem viæ per quam feruntur. Sed quòd ideò tales motus non ſint reverà diſtincti patet ex eo, quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tantùm aliquam lineam deſcribat. Nec refert quòd iſta linea ſæpe ſit valde contorta, et ideò à pluribus diverſis motibus genita videatur, quia poſſumus imaginari eodem modo quamcunque lineam etiam rectam, quæ omnium ſimpliciſſima eſt, ex infinitis diverſis motibus ortam eſſe. Ut ſi linea A B feratur verſus Fig. 16. C D, et eodem tempore punctum A feratur verſus B, linea recta A D, quam hoc punctum A deſcribet, non minus pendebit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm linea curva, quæ à quovis rotæ puncto deſcribitur, pendet à motu recto et circulari. Ac proinde quamvis ſæpe utile ſit unum motum in plures partes hoc pacto diſtinguere ad faciliorem ejus perceptionem; abſolutè tamen loquendo unus tantùm

« in unoquoque corpore eſt numerandus. Ita *Carteſius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps eſt, ut ab eo quoad ſitum ſuum aliquatenus determinetur, iſte motus hujus compoſitionem quaſi pars ingreditur, ab exemplis poſthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi poſſunt *Progreſſivi* cum *Progreſſivis*, *Progreſſivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi poſſunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire cenſum impoſſibile ſit, illoſque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile ſit, exponere difficiliùs; nos præcipuos ſaltem aliquos, in uſu magìs poſitos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis ſunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præſertim illi quos qui conſtituunt ſimplices motus omnes vel nonnulli ſunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Reſpublica requirit, ac exigit Eccleſia, ſed artes etiam atque ſcientiæ vehementer affectant.* Recti motns (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum ſibi non immeritò locum aſſerunt, ut ſimplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac uſitati. Nec ulla ſanè magnitudinis eſt ſpecies (nulla linea, nulla ſuperficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno planò conſtituta linea procreari poteſt è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis ſuperficies è motu parallelo plani, et lineæ iu eo (lineæ ſcilicet alicujus è rectis modo jam inſinuato motibus progenitæ) conſequenter et linea quævis etiam in curva ſuperficie deſignata rectis motibus effici poteſt. Corpus autem ſolidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è ſuperficierum genitura reſultat, et quatenus ab ipſis ità genitis terminatur, ac circumſcribitur Sed quia *ſuperficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Matheſis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam ſuccurrit animadverſione dignum quod de iis dicam, de linearum ſaltem in uno plano exiſtentium, per rectos et parallelos motus generatione diſpiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla eſt quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem ſpecialis lineæ producendæ natura poſcit; nec refert qualem, velocitatis reſpectu, motum uni tribuas, ad hujus modò diverſitatem alterius diverſitas ritè conſequatur accommodeturque. Ut e.g. ſi recta ZA ſemper per rectam AY ſibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (creſcente, vel decreſcente vel alternante ſecundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per ſingulas quaſque temporis partes eaſdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe ſi fuerit ſemper AB . AC :: BM . Cμ . vel AB, MX :: AM, Xμ (poſitâ ſcilicet MX ad AC parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta verſari. Eſt enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonſtrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ ſuis ad deſignatum in ea punctum diſtantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd ſi motus hi ſic inter ſe contemperentur, ut aſſumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipſius BM (à puncto mobili decurſæ in recta AZ) & ipſa BM ad quadratum ex AB (eodem tempore decurſa à linea AZ) rationem ſemper eandem progignetur *ellipſis aut circulus*; circulus quidem ſi ratio propoſita fuerit æqualitas, & angulus ZAY rectus, *ellipſis* ſi ſecus; & in his erit D una *diametrorum*, ſitum habens in linea AZ primò poſitâ, à vertice A porrecta verſus partes Z. Sin ità ſe habeant, ut rectangulum ex ſumma linearum D, & BM & ipſa BM ſemper eandem cum quadrato ex AB proportionem ſervet, eo compoſito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) ſi ratio deſignata fuerit æqualitatis, & angulus ZAY rectus; ſin aliter, alterius, pro rationis aſſignatæ quantitate, ſpeciei; cujus *tranſverſa diameter* æquabitur ipſi D, ſitum habens in ZA primò poſita à vertice A protenſa verſus partes averſas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd ſi perpetuò rectangulum ex ipſa D, & decurſa BM ad quadratum ex AB eandem perpetuò rationem obtinet, conſtabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propoſitæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem caſu ſi motus tranſverſus per AY ponatur uniformis, etiam motus deſcendens per AZ uniformis erit; in ſecundo & tertio ſi motus per AY ſit uniformis, erit motus deſcendens perpetuò creſcens; eodemque poſito quoad ultimum caſum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate creſcet æqualiter. Nec abſimili modo quævis alia linea tali motûs compoſitione producta concipi poteſt. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujuſ-

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum paralleliſmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Fig. 18. Quorſum imprimìs methodi cauſâ repeto ſi recta AZ per rectam AY ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia AB, AC ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Fig. 19. Notetur intereà, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per AY et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe tranſverſum uniformem, & deſcenſivum continuò creſcentem) progenita linea per omnes ſui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipſa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ tranſeant B Z, C Z, D Z ad A Z parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta M N K. Et quia recta M N gignitur è motu compoſito tranſverſo per B C (vel huic parallelam M G) & deſcendente per A Z, uniformi utroque; tranſverſus autem per M G eſt prorſus idem cum tranſverſo, quo linea propoſita M N O deſcribitur; patet velocitatem deſcendentis motûs uniformis rectam M N gignentis minorem eſſe velocitate, quam motus itidem deſcendens, lineam M N O deſcribens, habet in N (etenim niſi motus hic velocior jam ſit illo, cùm continuò creſcere ponatur, in toto tempore deſcenſus per G N illo tardior fuiſſet, adeóque nunquam eodem tempore ſpatium æquale tranſegiſſet, nec unà cum eo pertigiſſet ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increſcens per tempus motûs uniformis C D continuatus (quo nempe gignitur linea N O) majus ſpatium emetitur, quàm uniformis motus deſcendens, quo M N. ad K protractus deſcribitur, eodem tempore C D; (liquet enim eodem tempore à majore vi creſcente majus ſpatium peragi, quàm à minore neutiquam creſcente) quare linea H O major eſt quàm H K; adeóque tria puncta M, N, O non exiſtunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibuſvis lineæ M N O punctis conveniat, abunde patet eam eſſe nullibi rectam, ſed per omnes ſui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis deſcendentis, quo curvæ M N O ſubtenſa quævis (ut M N) deſcribitur, exiſtente ſcilicet communi tranſverſo motu uniformi quo ipſa, ejúſque arcus fiunt, minor eſt velocitate quàm motus deſcenſivus increſcens habet ad communem utriuſque terminum N.

III. Hujuſce curvæ *ſubtenſa* quælibet (ut M O) intra *ſuum arcum* (verſus partes A Z) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam M N O.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam ſi ſumatur in arcu M O punctum quodvis N, & connectantur rectæ M N, N O liquet totam M O intra rectas M N, N O jacere, & proinde intra curvam M N O. Tota verò, ſi producatur, extra lineam M N O cadit, quia nuſquam alibi ei occurrit, utì mox oſtenſum. || Hoc accidens de circulo ſpeciatim demonſtrat *Euclides*, *de ſectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, fore convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari; nec aliò recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſúſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantùm puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpeciatim oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*.

Apoll. I. 26.
Arch. de Conoid. & Sph. 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcenſûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*.

I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

I. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. I. 24, 25. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius.*

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam A Z ſecantes (infra punctum A, ſupráque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi A Z parallelas ſecent etiam infinitè productæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtra-* I. 27, 28. *tioni in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius.*

X. Porrò liquet applicatas ad rectam A Y, ipſi A Z parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius A Y partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe B M ad C N minorem rationem habet, quàm A B ad A C, vel B M ad C F; quia C N ⊏ C F. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelas mota retrogradè (à D puta verſus A per D A) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam T M S propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ A Z in T, ducatúrque per M recta P M G ad A Y parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eóque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta T P deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta A Z fertur per A C vel P M. (vel, quòd eodem recidit, dico quód velocitas puncti deſcendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta A Z ſe habet, ut recta T P ad P M.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipſum ducatur recta K G, curvæ occurrens in O, parallelis autem A Y, & P G in D, & G. Et quia tangens T M duplici concipiatur uniformi motu deſcripta, altero rectæ T Z per A C vel P M parallelus delatæ, altero puncti deſcendentis à T per T Z; & ſit horum motuum alter per A C, vel P M communis vel idem cum illo quo curva deſcribitnr; cùm T Z eſt in ſitu K G, erit A Z in eodem; ergò cùm punctum à T deſcendens fuerit in K, erit punctum ab A deſcendens in curvæ cum K G interſectione O (nec enim, ut anteà deductum eſt, alibi recta K G curvam ſecat) eſt autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota verſatur. Jam ſi punctum K ponatur ſupra contactum verſus T, quoniam tum O G minor eſt quàm K G, liquet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva deſcribitur, in curvæ puncto O minorem eſſe velocitate motûs uniformis deſcendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa ſemper increſcens eodem tempore (per G M repræſentato) minus ſpatium tranſigit, quàm hæc minimè creſcens; aſt eadem continuò perſeverans; illa ſcilicet rectam O G hæc rectam K G conficit. Contra vero ſi punctum K infra contactum ad partes S exiſtat, quoniam O G tum major eſt quàm K G, patet velocitatem puncti deſcendentis, quo curva fit, in puncto O majorem eſſe velocitate motûs uniformis itidem deſcendentis, quo tangens efficitur; quia motus iſte, continuò decreſcens eodem per G M tempore, majus peragit ſpatium O G, quàm hic minimè decreſcens, at in eodem tenore perſiſtens, conficit, ipſum nempe ſpatium K G. Ergò cùm velocitas curvam deſcribentis puncti quovis in curvæ puncto ſupra contactum verſus A minor ſit velocitate motûs per T P; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipſo contactu M ei penitus exæquari. Q. E. D.

XII Hujus converſa, conſimili diſcurſu, rem breviùs exponendo, demonſtretur. Nempe, ſi velocitas puncti deſcendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam T P deſcriberet tempore P M vel A C (vel ſit velocitas motûs deſcendentis ad M ad velocitatem motûs tranſverſi, ut T P ad P M) recta T M S curvam A M O tanget ad M. Fig. 20.

Nam ſumpto quovis in recta T S puncto K, & ductâ K G ad A Z parallelâ; quoniam verſus partes A T velocitas aſcendentis puncti, curvam efficientis, ſemper decreſcit ab M ad O, illi verò ex hypotheſi par velocitas puncti rectam M T gignentis haud decreſcit ab M ad K, ſitque tempus M G commune, erit ſpatium G O minus quàm G K; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia verſus alteras partes, velocitas deſcendentis, quo curva fit, increſcit ſemper ab M verſus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta M S fit, haud creſcit ab M ad K; idémque ſit rurſus tempus M G, liquet rectam G O excedere rectam G K; & idcirco punctum K ſupra curvam exiſtere. Quare manifeſtum eſt omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiſtere; & eam proinde curvam contingere: Q. E. D.

XIII. Ex hiſce ſtatim *conſectatur, hujuſmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta M T curvam A M O ad M; & ſi fieri poteſt altera M X etiam tangat. Ergo eodem tempore, eâdem velocitate (illa ſcilicet, quæ puncti curvam deſcribentis ad contactum M acquiſitæ velocitati æquatur) deſcribetur utraque recta X P, T M; quare X P, T P æquales erunt, totum & pars: Q. E. A. Ergo non tanget altera præter poſitam M T. || *Hanc ſpeciatim de circulo demonſtravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aſpernandum, quòd eâdem operâ *propoſitiones de tangentibus inverſæ demonſtrantur.* Nempe ſi determinetur angulus P M T (vel alter quiſpiam quem recta poſitione data cum tangente facit ad punctum curvæ deſignatum) aut ſi determinetur quantitas rectæ P T (vel ſimilis cujuſpiam alterius à puncto in data poſitione recta deſignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, ſi tangens ſitu determinetur, angulorum atque linearum ejuſmodi quantitas indè dignoſcetur. Adeóque parcetur operæ, qualem inſumpſerunt plerique tales propoſitiones inverſas demonſtrandi. Quod & eo magìs obſervatu dignum eſt, quia ſæpe talium inverſarum propoſitionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonſtratur. Cujus obſervationis, niſi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

Eucl. III. 16, 17.
Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti deſcendentis velocitates in duobus quibuſvis deſignatis curvæ punctis ad ſe proportionem habere reciprocè compoſitam è rationibus applicatarum ab iſtis punctis ad rectam AZ (ipſi ſcilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad iſta puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione ſubductæ.)

Nempe ſi duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipſius TP ad PM, & ipſius QN ad QX. Fig. 21. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY ſe habet ut TP ad PM; & velocitas iſta uniformis ſe habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concurſu tangentium ductâ FE ad AY parallelâ; fore TE, XE = TP . PM + QN . QX.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem conſequi *Problematis iſtius ſolutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingenioſiſſimè reperiſſe. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipſe *Galilæus* ad manum non eſt) propoſitâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod ſublime reperire; è quo ſi grave cadat uſque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, Fig. 22. ipſa *propoſitam parabolam* deſcribat (notetur, quod motus deſcenſivus parabolam deſcribens non è puncto ſublimi, ſed ab ipſo puncto A cenſetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* ſuppoſitis inſiſtendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, ſeu tranſverſi, & æqualiter creſcentis deſcenſivi quorum è compoſitione deſcripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque ſit creſcentis deſcenſivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; ſpecialem illum de *parobola* caſum in exemplum ſubjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ ſanè curvæ diameter eſt) punctum aliquod, ut P, à quo ſi ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, ſit intercepta TP æqualis ipſi PM; tum ſumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile deſcendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam deſcribendo (ponitur enim increſcentis velocitatis motus utrobique prorſus idem) iſte verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T deſcendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter lata, perque motum iſtum in curva deſcribenda conſpirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur ſint TP, PM ex conſtructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus ſimul peraguntur, æquales; etiam motus deſcenſivus in P, vel M æquabitur motui tranſverſo, curvam deſcribenti, hoc eſt motûs ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S eſt id ipſum, quod inveniri debuit, & abſolutum eſt propoſitum. | Fig. 22. Exemplo ſit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & deſcenſivo pariter accelerato; tum punctum P ità facilè per *Analyſin* inveſtigatur. Sit recta R *datæ parabolæ rectum latus*. Eſt igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypotheſi modi noſtri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate eſt $TPq = 4\,APq$. Ergo eſt $R \times AP = 4\,APq$. Adeóque $R = 4\,AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem caſu puncta T, S coincidunt. Quòd ſi rurſus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate creſcendo deſcendant, adeóque motus ipſorum talis cum uniformi tranſverſo compoſitus *parabolam cubicam* deſcribat, & ſit R iſtius curvæ *parameter*, erit eo in caſu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujuſce curvæ proprietate eſt $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præſcripto eſt $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujuſmodi *parabola* tangentis intercepta ſemper triſecatur à vertice (nimirum ut ſit $AP = \frac{1}{3}TP$) eſt TP cub. $= 27\,AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27\,AP$ cub. Adeóque $Rq = 27\,APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis ſimili ratione procedentes aſſequemur propoſitum. Poſſent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propoſitiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, ſed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *ſpecimine* (quoad iſta) contentus; huc non niſi per tranſcurſum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana ſuperficies*, cujus ſingulæ quæque partes applicatis ad iſtam rectam parallelis interceptæ proportionales ſint rectis ad rectam AY ſimpliciter diviſam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujuſce ſuperficiei ad parallelogrammum æquealtum, ſuper eadem baſe conſtitutum, proportio proportionem indicabit ipſarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Fig. 23, 24.

Hæc poſthàc γεωμετρικώτερον demonſtrata habentur.

Ut ſi ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana ſuperficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque diviſâ AD punctis B, C, ſimilitérque dicisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis β, γ, fuerit ut BM ad CM ità ſuperficies $\beta\alpha\mu$, ad ſuperficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus univerſis taliter inſtitutis contingat; *completo parallelogrammo $\alpha\delta\mu\phi$, ſe habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut ſuperficies $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\phi$.* Et enim ſi recta $\alpha\delta$ commune tempus deſignare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato tranſiguntur, recta $\delta\mu$ bene deſignabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum deſcendens in curvæ puncto M infimo; hoc eſt velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonſtratum eſt.) *Parallelogrammum $\alpha\delta\mu\phi$* optimè *Spatium* repræſentabit, quòd hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter deſcribitur, hoc eſt ipſam rectam TP. Cùm igitur, ex hypotheſis præſtratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræſentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\phi$, ità AP ad TP; cognitaque proinde modo quovis iſtâ proportione, ſimul hæc innoteſcet; & reciprocè. Exemplo res manifeſtior evadet uno, vel altero. Propoſita curva ſit *parabola quadratica*, ſeu in qua rectæ BM, CM ſe habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc eſt ut quadrata ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$. Ergò ſi figura $\alpha\delta\mu$ ſit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo ſuppoſito ſemper triangula $\beta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, hoc eſt rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\phi\mu$ eſt ſubduplum, erit recta AP quoque rectæ TP ſubdupla; quod ità ſe habere demonſtratum habetur in *conicis elementis*, & paſſim agnoſcitur. Sit rurſus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM ſe habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc eſt ut cubi rectarum $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$; & ſi *ſuperficies $\alpha\delta\mu$ fuerit complementum ſemiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ cubis ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis oſtenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimenſione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio propoſito quàm rectiſſimè adaptetur *parabola quadratica*; cúmque conſtiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ ſubtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\phi$; erit etiam juxta regulæ jam aſſignatæ præſcriptum recta AP quoque ſubtripla rectæ TP. De qua concluſione ſatis convenit inter *Geometras*.

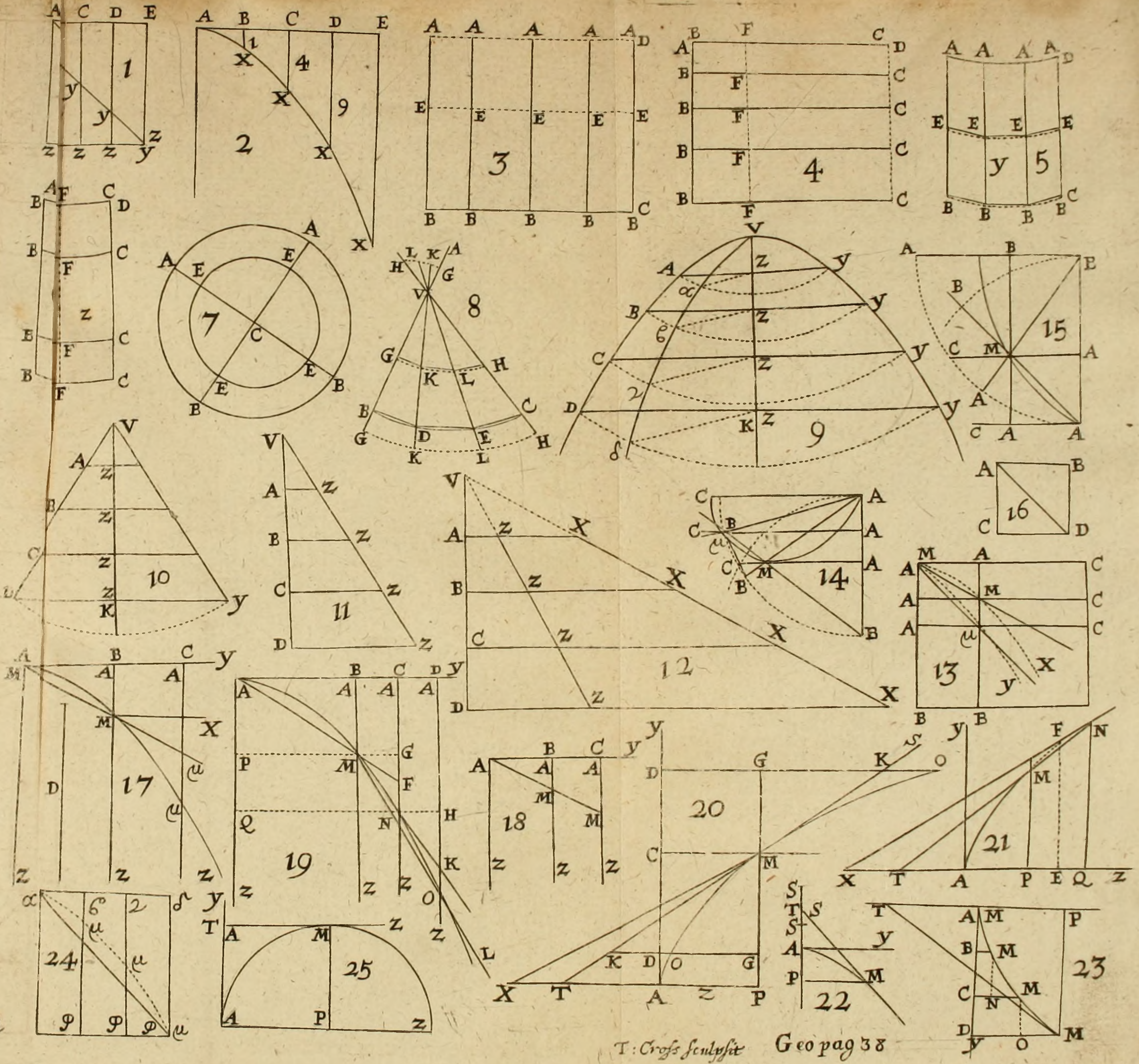
Fig. 23, 24.

XVII. Huic ſuppar modus dictas rectas A P, T P comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc eſt ad ejus ſingula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam A D conſimiliter diviſam applicatarum differentiis proportionales, reſultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandémque baſin poſitum, rectarum A P, T P proportionem exhibebit. Ut ſi rectæ A D, $\alpha\delta$ ſimiliter (in partes ſcilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis B M, N M, O M (quæ differentiæ ſunt rectarum ad A D applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales ſint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\phi$, ità A P ad T P. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad A D; puta *v. g.* D M æquetur omnibus ſeipsâ minorum differentiis (ipſis nempe B M, N M, O M) & trilineum $\alpha\delta\mu$ conſtituatur è rectis $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione creſcentibus; ut & recta C M æquatur ipſis B M, N M; & ei reſpondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quaſi conflatur è parallelis $\beta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione creſcentibus; & hoc ſemper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\beta\mu$ rectis D M, C M, B M proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hìc rectas $\beta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræſentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in reſpectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita reſpectiva temporis inſtantia; quibus (ut jam olim præmonitum) reſpondentia ſpatia B M, C M, D M proportionantur.

Fig. 25.

II. *preced.*

XVIII. E ſupradictis porrò conſectatur, quòd ſi *Circulus*, *Ellipſis*, ejuſmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas deſcribens infinitam in recursûs puncto velocitatem habebit. Nempe ſi quadrans A F M ità generetur; quoniam tangens T M diametro A Z eſt parallela, nec illa proinde cum hac niſi ad infinitam diſtantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per A Y ſe habebit, ut infinita recta ad ipſam P M; unde velocitas iſta ad M prorſus infinita ſit oportet. Ità quidem quoad hujuſmodi curvas; at quoad alias ad infinitum ſenſim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) deſcendentis puncti velocitas in quovis deſignato curvæ puncto finita eſt. Verùm his omiſſis ad alias propoſitæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.


1
2
3
4
5
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
V
A
B
C
D
E
F
K
L
M
N
P
Q
T
X
y
z

T: Croſs ſculpſit   Geo pag 38

LECT. V.

IN deducendis è propoſitâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diverſa curvæ puncta, ſibimet inæquales ſunt; & minores ſunt illi qui puncto A (ſeu vertici) propiores ſunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ ſint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipſi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipſa XN ſecabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifeſtum eſt autem cum puncta H, N ſint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH ſeſe interſecare inter parallelas PH, QE; quare major eſt angulus externus QNX interno QET, hoc eſt angulo PMT: Q. E. D. Fig. 26.

II. Hinc *poriſmatis* loco habetur *tangentes ſe interſecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter TM, QN protenſas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem eſſe*; (externum ſcilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quaſvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quàm remotiores.

Cæterùm iſta jam olim de *Sectionibus Conicis* oſtenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* eſt videre

V. In figura præcedente (poſito applicationis angulum TAY rectum eſſe, vel obtuſum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem eſſe; rectâ verò ME minorem.*

Nam connectatur ſubtenſa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor eſt recto, erit, eo major externus, NHP obtuſus. Ergò recta NM major eſt quam NH. Itaque magis arcus, arcus NH major eſt quam ipſâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang RNE ipſi XQE par haud minor eſt recto, erit RE $\sqsubset$ RN. quare MR + RE $\sqsubset$ MR + RN. hoc eſt ME $\sqsubset$ MR + RN. Eſt autem (ex *Archimedæis* aſſumptis) MR + RN $\sqsubset$ arc. MN. ergò magis eſt ME $\sqsubset$ arc. MN ∴

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc couſectatur, ſi arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò ſubſtitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 27. Recta AY ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX ſecans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, ſecans curvam APX in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipſámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta PE $\sqsupset$ arc PX. adeóque PA.PE $\sqsubset$ arc PA.PX :: PM.PM — XZ :: PM.EH — XZ :: PM.ZH — EX $\sqsubset$ PM.ZH. quare permutatim erit PA.PM $\sqsubset$ PE.ZH. eſt autem PA : PM :: MR.RS :: MH.KH :: PE.HK. ergò PE.HK. $\sqsubset$ PE.ZH. quare HK $\sqsupset$ ZH. eſt autem punctum H extra curvam AZM, ob EZ $\sqsupset$ XZ $\sqsupset$ PM = EH. ergò palàm eſt punctum K extra curvam AZM exiſtere. Sit verò ſecundò

punctum Z infra punctum M; erit tum recta P E major arcu P X; unde arc P A. P E $\sqsupset$ arc P A. P X : : P M. X Z — P M : : Fig. 27. P M. X Z — E H : : P M. X E + X Z $\sqsupset$ P M. H Z. & viciſſim P A. P M $\sqsupset$ P E. H Z. Verum ut prius) eſt P A. P M : : P E. H K. ergò P E. H K $\sqsupset$ P E. H Z; proptereáque H K $\sqsubset$ H Z; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur; & eam tangit ad M : Q. E. D. In tranſcurſu hoc. ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & Fig. 28. ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergo recta E F eidem occurret; at curvam prius tranſiliat oportet. ergò liquet Propoſitum.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. Con. I. 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet*; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tan- Fig. 29. gentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent.

Nam ducatur ſubtenſa N M; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang O M H $\sqsupset$ (ang. T M H = ang. X N K $\sqsupset$) ang. O N K. ergo ang. H M N + M N K $\sqsubset$ 2 rect. ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari; ſeu alterum alteri fore externum interno. alias cotnra eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tan- Fig. 30. genti M T) & in hac ſumatnr quæpiam definita H M; erit H M mi- Apoll. V. 38 &c. nima rectarum omnium, quæ a puncto H duci poſſunt ad curvam.

Ducatur enim quævis H O ; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet H R majorem eſſe quàm H M ; multóq; magìs eſſe H O $\sqsubset$ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M deſcriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inverſè, ſi H M minima ſit omnium quæ ab H ad curvam duci poſſunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam ſecabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergo quum ſit H R $\sqsubset$ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens eſt. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam ſi recta H M minima ſit omnium quæ ab H duci poſſunt, eiq; perpendicularis ſit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (ſi fieri poteſt) X M ; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X, H M T ; totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem eſſe.

Nam ducatur ſubtenſa M N ; hæc producta curvam tranſgredietur, & ipſam H O ſecabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtuſus eſt (major illo nempe, quem tangens cum H M conſtituit ad M) erit H N R magìs obtuſus; adeóq; recta H R $\sqsubset$ H N & magis H O $\sqsubset$ H N.

XV. Hinc perſpicuum eſt Circulum quemvis Centro H deſcriptum, uno tantùm ad eaſdem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quam in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ ſint rectæ I N, K O ; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipſi curvæ perpendiculares E N, F O ; hæ cum ipſa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P ; ſibi verò ipſis in Q.

Liquet jam eſſe ang. F O K = ang, F P H $\sqsubset$ ang. P R Q = ang. N R H = ang E N J. Cùm ergò ſit ang. F O K major angulo E N J, liquet propoſitum.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M aſſumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipſam H M parallelæ. Eſt igitur ang. F O K $\sqsubset$ ang. E N I. Item ang. O H M $\sqsubset$ ang. N H M. hoc eſt ang. K O H $\sqsubset$ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H $\sqsubset$ ang E N I + I N H. hoc eſt ang. F O H $\sqsubset$ ang. E N H. Unde conſtat Propoſitum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* creſcere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquiſſima.

XIX. Porrò ſi introrſum jam ſumatur punctum H, & ab eo incidens H M ſit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, ſeu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem eſſe. ergò H R $\sqsupset$ H M. & magìs H O $\sqsupset$ H M. quare H M non eſt minima contra *Hypotheſin*. *Apoll. V.* 32.

XX. Item ſi recta HM ſit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apoll. V.* 29.

Nam Circulus Centro H per M deſcriptus extra curvam totus cadet. ergò ſi recta M T Circulum tangat, hæc magìs extra curvam cadet, eámq; proinde continget. Eſt autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc ſi M T ſit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V.* 30, 39.

Nam ſi dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc ſi recta Y M non ſit curvæ perpendicularis; in ea nulla ſumi poteſt *maxima*, vel *minima*.

Nam ſi ſumi poſſet, eſſet ex eo ipſo Y M curvæ perpendicularis contra *Hypotheſin*. *Apoll. V.* 31; 47.

XXIII. Si H M ſit incidentium minima, & intra ipſam ſumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. *Apoll. V.* 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M deſcriptus *curvam* intròrſum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *deſcriptus* introrſum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam ſi HM ſit incidentium maxima, & extra ipſam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *deſcriptus curvam* extrorſum contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *deſcriptus eandem extrorſus continget.* unde conſtat *Propoſitum.* *Apoll. V. 39.*

Cæterùm *minimarum* & *maximarum propior determinatio pendet ex ſpeciali curvæ natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræſentiarum hujuſmodi pleraq; complecti profitemur. Inſtituto noſtro ſufficit hactenus generalis cujuſdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *ſpecimen* exhibuiſſe: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibuſdam partibus adſcribere, vel ex anguſtiori fonte derivare. *Plura* forſan, & *abſtruſiora* proferemus aliquando. Nunc his ſuperſedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD eaſdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum expoſui; illas præſertim, quas à veteribus *Geometris* obſervaram ſpecialibus, quas ipſi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, ſi complures alias (abſtruſiores quidem illas, at non injucundas prorſus, aut inutiles) appoſuero; pro meo more quàm conciciſſimè demonſtratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis ſcientifica videtur, hoc eſt quæ nedum concluſionum veritatem aſſerit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Verſantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium abſque calculi moleſtia vel faſtidio inveſtigationem ſimul ac demonſtrationem expeditam* (è ſimplicioribus nempe vulgatioribúſque perplexiora minúſque perſpecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimenſiones, tangentium deſignatarum ope, quam promptiſſimè determinandas*; quæ materiæ cum præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (ſicut aliæ quædam) occupatæ vel exhauſtæ ſunt, ad hunc ſaltem modum quod ſciam nondum tractatæ Quin è veſtigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clariùs & breviùs oſtendendis aliquem proſpicimus uſum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, ſit item linea O D O talis, ut per D ductâ quâvis rectâ D N; ſit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénſq; ipſi A B in L; & in protracta B L ſumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob poſitam D O = M N; erit H O = B N; ergo quum ſit D H . H O :: (D L . L N :: D L —

$DH . LN - HO :: LH . LB ::)$ $LH . HK$. erit $DH \times HK = HO \times LH$; hoc eſt $DL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. unde erit $DL \times HK = KO \times LH$. vel $ZL \times LD = ZK \times KO$. ergò conſtat lineam ODO eſſe *Hyperbolen*, cujus *Aſymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc oſtendi poſſet, producendo rectam NDS. Nam eſt $DS = DM = DO \pm OM = NM \pm OM = ON$. Similiter quartam & nonam breviùs demonſtres licet.

Fig. 38. Quinimò ſi MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe ſi tum fiat $R . S :: LB . LZ$; & $R . S :: DL . DE$; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E tranſeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ aſymptoti* quod jam ſufficerit innuiſſe.

Hinc in tranſcurſu noto facilè confici *Problema* (*quo problematum confectiones iſtæ Archimedeæ, ac Vieteæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur*) Per datum punctum D rectam lineam ducere, ſic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam deſcriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante deſcribatur circulus POQ *hyperbolam* interſecans in O; & producatur DON; fiétq; $MN = DO = T$. Modus autem hic generalior eſt, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D; ſit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, ſit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem ſemper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipſi AB occurrens in L; ſecentúrque DL, BL punctis E, F, ut ſit $DL . DE :: X . Y :: BL . BF$; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob $DL . DH :: LN . HO :: LB + BN . HO :: DE \times LB + DE \times BN . DE \times HO$. item $DL \times KO = DE \times BN$ (nam $DL . DE :: MN . MO :: BN . KO$) & $DE \times LB = DL \times BF$ (ob $DE . DL :: BF . LB$;) erit $DL . DH :: DL \times BF + DL \times KO . DE \times HO$; hoc eſt $DL \times BF + DL \times KO . DH \times BF + DH \times KO :: DL \times BF + DL \times KO$.

$DE \times HO$ ergò $DH \times BF + DH \times KO = DE \times HO$; hoc eſt $DH \times BF + DH \times HO - DH \times BL = DE \times HO$; tranſponendo igitur eſt $DH \times HO - DE \times HO = DH \times BL - DH \times BF$. hoc eſt $EH \times HO = DH \times FL$; vel $EH \times GO + EH \times HG = DE \times FL + EH \times FL$; quare, demptis æqualibus, eſt $EH \times GO = DE \times FL$; vel $ZG \times GO = DE \times FL$; cum itaque $DE \times FL$ ſit quid determinatum, conſtat lineam OBO eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monſtrat; nec abludit modus demonſtrandi. Fig. 40.

VI. Conſectarium. Si recta BQ angulum ABC ſecet, perque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ interſecantes punctis OP (quorum utique ſit O propius ipſi B) erit $MN . MO \sqsupset XY . XP$. Nam per O deſcripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, ſic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur $MN . MO :: (XY . XV) \sqsupset XY . XP$. Fig. 41.

Coroll. Dividendo eſt $NO . MO \sqsupset YP . PX$.

VII. Quinimò ſi plures lineæ BQ, BG angulum ABC ſecent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras interſecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit $NE . MO \sqsupset YF . VX$. Fig. 42.

Nam $NE . EO \sqsupset YF . FV$; & $EO . OM \sqsupset FV . VX$. igitur ex æquo eſt $NE . OM \sqsupset YF . VX$. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci poſſe; ita ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam ſumatur $PQ = PZ$; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad eaſdem; hoc eſt minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rurſum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.

linea O O O talis, ut ſi è D utcunque ducatur recta D O, ſecans Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O ſemper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Nam ducatur D L ad B C parallela; ſitque D L . D E : : X . Y; & per E ducatur E *R* ad A B parallela; ſecans B C in *Z*; demum per O ducatur O H ad B A parallela.

Eſt jam D L . D E : : D M . N O : : L M . G O (ob ſimilia triangula D L M, N G O) : : L M × D H . G O × D H item D L × H O = L M × D H (ob D L . L M : : D H . H O) quare D L . D E : : D L × H O . G O × D H hoc eſt D L × H O . D E × H O : : D L × H O . G O × D H adeóq; D E × H O = G O × D H . hoc eſt D E × H G + D E × G O = G O × D E + G O × E H quare (communi ſublato) eſt D E × H G = G O × E H; ſeu D E × H G = G O × Z G. Patet itaque curvam O O O eſſe *hyperbolam* cujus *aſymptoti* Z R Z C.

Coroll. Si ratio data ſit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipſæ A B, C B aſymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magìs id perſpicuum videtur, Algebricè monſtrabimus.

X. Eſto poſitione data recta I D, in qua punctum deſignatum D; Fig. 44. ſit item curva D N N talis ut in I D ſumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad poſitionem datam I K parallelá; tum adſumptis determinatis rectis m, b; poſitíſq; D G $= x$, & G N $= y$; ſit conſtantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea D N N *hyperbola*; quæ ſic determinatur; ſumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipſi m; & per M ducatur M L ad I K parallela, factóq; $b . m : : m$. M Q; ſit M Z = 2 M Q $= \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T aſymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipſam Z T ſecet in P). & connectatur D Q. Eſt ergò P N = R G + G N — R P. Verùm eſt M D . M Q : : Z R (M G) . R P; hoc eſt $m . \frac{mm}{b} : : m + x$. R P $= \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$. adeóq; R G — R P $= \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$. ergò P N $= \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde P N × M G $= \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$. Verùm (ex hypotheſi) eſt my

$+$

$+ xy - \frac{mxx}{b} = 0$. ergò PN × MG $= \frac{m^3}{b} =$ MD × ZQ. vel PN . ZQ : : (MD . MG : :) QD . ZP. Quapropter eſt PN × ZP = ZQ × QD. Unde palàm eſt curvam DNN eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZM, ZT. Fig. 44.

XI. Notetur; ſi æquatio ſit $my - xy = \frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc ſolùm puncta G ad partes DM ſumuntur. Quin & ſi æquatio ſit $xy - my = \frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipſi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum BDF; & linea DNN talis, ut ductâ utcunque RN ad BD parallelâ (quæ lineas BF, DF, DNN ſecet punctis R, G, N) connexâque rectâ DN; ſit perpetuò DN proportione media inter RN, NG; erit linea DNN *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur DK ad DB perpendicularis (ſecans ipſam RN in E) & ſit FH ad DB parallela; vocentúrque DB $= b$; DF $= d$; FH $= f$; tum DG $= x$; & GN $= y$; Eſtque $d . f : : x . \frac{fx}{d} = GE$; unde $\frac{2fxy}{d} + xx + yy = 2$ EG × GN + DGq + GNq = DNq. Porrò eſt $d . b : :$ FG . GR $: : d - x$. RG $= b - \frac{bx}{d}$. Unde RN $= b - \frac{bx}{d} + y$. Et ideò $by - \frac{bxy}{d} + yy =$ RN × NG = DNq $= \frac{2fxy}{d} + xx + yy$. quare $by - \frac{bxy}{d} = \frac{2fxy}{d} + xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y - yx = \frac{d}{2f+b}xx$. quòd ſi ponatur $m = \frac{db}{2f+b}$; erit $my - xy = \frac{m}{b}xx$. Unde liquet DNN eſſe *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus DGN rectus fuerit, evaneſcente tum $f = 0$, erit

$d = m$; vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Alia quædam hìc (nonnulla forſan παρέργως) inſeremus.

Fig. 46. XIII. Sit poſitione data recta I D; ſit item curva D N N talis, ut in I D ſumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad poſitionem datam I K parallelâ; ſumptíſque determinatis lineis g, m, r; poſitíſque $DG = x$, & $GN = y$; ſit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, ſic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & ſit $QY = MQ$; & ab M Y auferatur $YZ = g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *aſymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (ſed & G R ipſam Z T ſecet in P). Eſtque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + 0. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$. unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam D N N eſſe *hyperbolam*, cujus *aſymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò ſit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G deſignantur, æquationis ſigna variantur; at non eſt ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando tranſeat recta D Y, ſic ipſam B A ſecans in E, ut ſit inter rectas B E, D C eadem ſemper proportio (puta quæ cujuſdam aſſignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X ſe interſecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam ſit $R . DB :: DB . P$. Eſt ergò $BE . DC :: DB . P$. Item eſt $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

$CN + DB . P$. hoc eſt $DB . DC :: DC \times DB . CN \times P$. hoc eſt $DB \times DC . DCq :: DC \times DB . CN \times P$. Quapropter eſt $DCq = CN \times P$; ergo patet *curvam D N N eſſe parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipſi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* ſed operoſâ (ſi probè memini) prolixitate, demonſtratum.

*In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iiſdem poſitis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam ſemper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam interſectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam biſecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, ſecans curvam D N N in V; & quoniam eſt $BC . R :: BE . BD :: CN . CD$. erit $BC \times CD = R \times CN$. ergò (ſecundum benè notam *parabolæ proprietatem*) eſt curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria ſunt forſan iſta; ſed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis ſimiliter poſitis, recta C X non jam ad ipſam BA, ſed ad aliam poſitione datam (D H) feratur parallela; ſitque perpetuò $BE . DC :: DB . R$; erunt *interſectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur $DB = b . BH = h$; $DG = x . GN = y$. Eſtque $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$. item $h . b :: y . \frac{by}{h} = GC$. quare $CD = x - \frac{by}{h}$. Eſt igitur (ex hypotheſi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{h} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{hry}{b} = \frac{h}{b}xx$. ponendóq; $\frac{hr}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; eſt ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ ſuprà habetur determinata.

* In 10 hujus.

XVII. Quinetiam ſi (reliquis, ut in præcedente, ſuppoſitis) ità jam feratur C X, ut ſemper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èſtque jam $BC = b - x + \frac{by}{h}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

$\frac{by}{h}$ :: $b . r$. unde talis emerget æquatio: $yx + hx - \frac{hr}{b}y = \frac{h}{b}$
Fig. 50, 51, 52. $\times xx$; hoc eſt (poſito $\frac{hr}{b} = m$) $yx + hx - my = \frac{m}{r}xx$; Eſt igitur curva B N N *hyperbola*, qualem ſuperiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; (& in D B deſignetur punctum D) ſitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N
Fig. 53. ad B A parallelâ; ſumptis verò determinatis g, r, vocatíſque D G $= x$; & G N $= y$, ſit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, ſic determinanda.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *aſymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, eſt Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P × P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypotheſi eſt $- gx + ry - yx = 0$. ergò Z P × P N $= gr =$ Z E × E D. undè liquido conſtat Propoſitum.

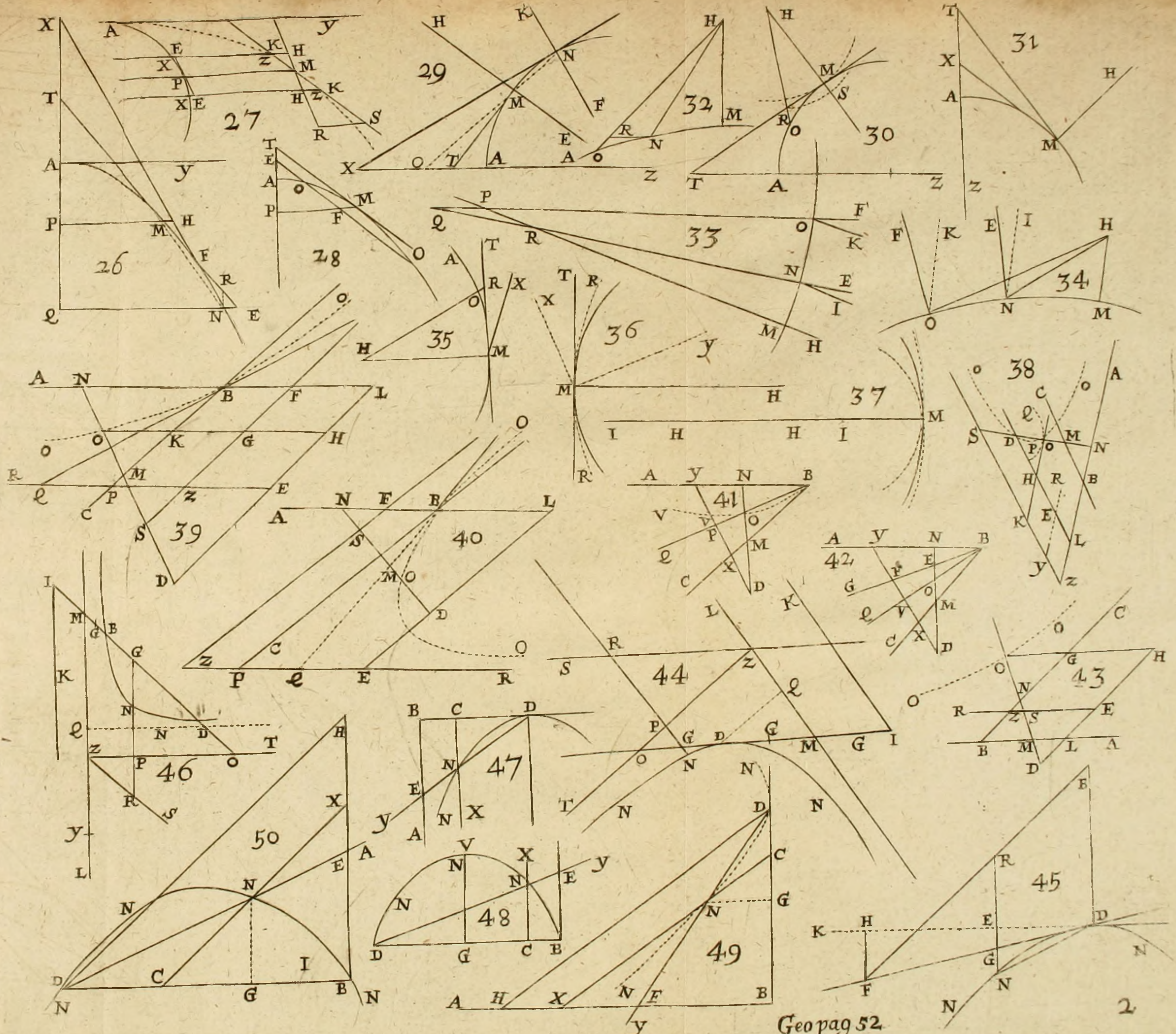
Quòd ſi fuerit æquatio $xy - ry = gx$; ſumenda eſt D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductíſque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehenſa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum deſignatum D tranſiens, ut ſit ſemper ratio ipſius B E ad ipſam B F æqualis aſſignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X interſectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; éſtque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque ſemper eſt D G = R. Patet igitur factâ D G = R, & ductâ G K ad B A parallelâ, interſectiones omnes ad hanc exiſtere.

XX. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc ſumatur computandi initium; ut nimirùm ſit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, ſit D B $= b$; O B $= g$; D G $=$


26
X T A Y P M H F R Q N E
27
A y E X P X E K Z H M H Z K S R
28
T E A O P F M O
29
H K N M F E X O T A
32
H M R N A O Z
30
H M S R O T A Z
31
T X A H M Z
33
P Q R F O K N E I M H
34
F K E I H N O M
35
A T R X O H M
36
T R X M Y R
37
H I H H I M
38
O C O A Q S D P O M N H R B K E L Y Z
39
A N B F L O O K G H R M Q E C P Z S D
40
O N F B L A S M O D O Z P C Q E R
41
A Y N B V V O P M Q X C D
42
A Y N B F E G O M Q V C X D
43
C O O G H O N R Z S E B M L A D
44
L K R S Z Q P G D G M G I O N N N T N
45
E R K H E D G F N N N
46
I M G B K G N Q N D T Z P O R S Y L
47
B C D N E Y X N A
48
V N X N N E Y D G C B
49
D C G N A H X N F B Y
50
H X A E N N I D N C G B N

Geo pag 52

2

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x} . g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN eſt *hyperbola* ſuprà mox determinata.

Quòd ſi punctum O ſumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rurſus conſtat.

XXI. Quinetiam, reliquis ſimiliter poſitis, recta FX non jam ipſi DB, ſed alteri DH feratur parallela; ità ut aſſumpto in BA puncto habeat ſemper BE ad OF rationem aſſignatam (DB ad m) erunt interſectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; eſt ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare NK (FH) $= y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Eſt ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde reſultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$. vel facto $f . b :: m . r$; eſt $my + gx - yx = \frac{m}{r}xx$. Conſtat igitur lineam DNN eſſe *hyperbolam*; qualis ſuperiùs habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipſo puncto H. initium ſumat, (hoc eſt ſit BE . HF :: DB . m) evaneſcente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r}xx$; unde quoque ſuprà habetur alia determinatio ſimplicior.

XXII. Eſto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, ſit perpetuò $PY = \sqrt{:PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum eſt A, *ſemidiameter* AD, (vel *aſymptotos* AB) *ſemiparameter* autem P; faciendo AD . DB :: DB . P. Fig. 55.

Sit enim TD = 2 AD. Eſtque AD . P :: (ADq . DBq :: *6. 2. *Elem.* APq . PMq :: *TP × DP + ADq . PMq :: TP × DP . PMq − DBq ::) TP × DP . PYq. vel TD . 2P ; TP × DP . PYq. unde liquet Propoſitum.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq . PYq :: PA . PS.

Nam eſt PMq . DBq :: PAq . ADq :: PA . AS. ergò per rationis converſionem eſt PMq . PYq :: PA . PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſit jam PY = √PMq + DBq; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipſi DB) *Semiparameter* autem P, ſi fiat AF . AD :: AD . P.

Nam ducatur YK ipſi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2 FA; eſtque AF . P :: (AFq . ADq :: DBq . ADq :: PMq . APq :: PYq — DBq . APq :: AKq — AFq . KYq ::) TK × FK . KYq :: AF . P. unde conſtat Propoſitum.

Corol. Rurſus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq . PYq :: PA . PS.

Nam AD eſt *Semidiameter* ipſi AF conjugata. unde PA . AS :: PAq . ADq :: PMq . DBq. ergò PA . PS :: PMq . PMq + DBq :: PMq . PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipſis* cujus ſemiaxes AD, AC.

Nam ſit AV = AD. Eſtque ADq . DBq (ACq) :: AEq . EFq :: ADq — AEq . DBq — EFq. Hoc eſt ADq . ACq :: VE × ED . EGq. unde liquet Propoſitum.

Nota, Tangat GT *ellipſin* CGD; eſt EFq . EGq :: EA . ET.

Nam ob AE . AD :: AD . AT . eſt AEq . ADq :: AE . AT. unde AEq . ADq — AEq :: AE . AT — AE. Hoc eſt EFq . DBq — EFq :: AE . ET. hoc eſt EFq . EGq :: AE . ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD ſignetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG ſecet punctis E, F, G,) connexâque rectâ AF, ſit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares;

item PO ad TE parallela. Eſtque $EFq = EOq\,(CPq) + OFq + 2\,EO \times OF\,(+ 2\,CP \times OF)$. Verùm ob $CP . CA :: OP . OF :: CE . OF$; eſt $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2\,CA \times CE$. item eſt $AEq = CEq + CAq - 2\,CA \times CE$; quapropter eſt $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc eſt $EGq = (APq + PFq =)\; CVq + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm eſt $CE . (PO) . PF :: CP . AP :: CP . CV$; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG eſt *hyperbola*, cujus centrum C; ſemiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, ſumptáque $QR = AE$; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præſta ſis fidem; aut ipſe rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Poſitione datæ ſint rectæ AC, BD (ſe interſecantes in X) quas decuſſet recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD ſecet punctis P, K) ſit PL æqualis ipſi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, eſt $AQ . AP :: (BX . BK ::)\; QX . PL$: ergò linea ALL eſt recta.

XXVII. Poſitione data ſit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX ſecet in M, & lineam DNN in N) ſit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; ſitque $DB . Z :: Z . DE$; & connectatur NE; Eſt jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$; quare $DM . DB :: DE . DN$. ergò triangula DBM, DNE ſimilia ſunt; quapropter angulus DNE rectus eſt; itaque linea DNN eſt circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; ſed & ſuo modo rectam ac *circulum* ſibi lineas eſſe reciprocas. Verùm hìc, etſi præludiis noſtris nondum abſolutis, paulùm ſubſiſtamus.

LECT. VII.

ADhuc in *Veſtibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adſumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

Fig. 61.

II. In linea Y Z ſignentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N ſumpto puncto quopiam E, alteróque G extra L N (verſus Z); ſecetur E G in F, ut ſit $G E . E F :: N L . L M$; cadet punctum F ad partes M Z:

* 1 hujus.

Nam eſt $N E . M E$ * $\sqsubset N L . M L :: G E . F E \sqsubset N E . P E$. ergo $F E \sqsubset M E$.

Fig. 62.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ; pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ B T, B S ipſam G P ſecantes punctis L, K, dico fore $D S . D T :: K G . L G$.

Nam eſt $K G . L G = K G . G B + G B . L G = P K . P S + P T . P L = D B . D S + D T . D B = D T . D S$.

Fig. 63

IV. Eſto triangulum B D T, baſique D B parallelam quamvis P G interſecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ B S, B R punctis L, K; dico fore $L G \times T D + K L \times R D . K G \times T D :: R D . S D$.

Sumantur enim $B M = G P$, & $B N = L P$; & $B O = K P$; unde conſtat junctas P M, P N, P O ipſis T B, S B, R B (reſpectivè) parallelas eſſe. Et quoniam eſt $D M . P D :: D B . T D$. erit $D M \times T D = P D \times D B$. Similiter eſt $D N \times S D = P D \times D B$. quare $D M \times T D = D N \times S D = D M \times S D + M N \times S D$, tranſponendóque $D M \times T D - D M \times S D = M N \times S D$. Simili planè diſcurſu eſt $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc eſt Fig. 63. $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; tranſponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc eſt $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogiſmum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propoſitum.

V. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem puncti D partes ſita ſint, Fig. 64. erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$.
Simili conſtabit id diſcurſu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium ſeries æquinumeræ (quales adſcriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi conſequentes inter ſe proportionales ſint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejuſdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter ſe proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

$A. \quad B. \quad C. \quad D. \quad E. \quad F.$

$\alpha. \quad \beta. \quad \gamma. \quad \delta. \quad \epsilon. \quad \varphi.$

$M. \quad N. \quad O. \quad P. \quad R. \quad S.$

$\mu. \quad \nu. \quad o. \quad \pi. \quad \varrho. \quad \sigma.$

Sunt enim $A\mu, B\nu, Co, D\pi, E\varrho, F\sigma,$ & $\alpha M, \beta N, \gamma O, \delta P, \epsilon R, \varphi S,$ } Continuè proportionales.

Cùm igitur ſit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum eſt fore $D\pi = \sigma P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè ſpectat hæc Concluſio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ ſint; háſque ſecet poſitione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ ſint, ut ductâ utcunque Fig. 65. recta PG ad DB parallelâ; ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis deſignatum lineæ EBE punctum E tranſeat HE ipſis AB, CD parallela, ſítque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, ſit QX eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, utì patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

$$\left.\begin{array}{lll} QS\,* & QR\,* & QI. \\ QL\,* & QK\,* & QI. \\ PG\,* & PF\,* & PE. \\ PE\,* & PE\,* & PE. \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sunt } \div\div.\ \text{unde } QR.\ QK :: \\ PF.\ PE. \end{array}$$

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR . QK :: PF . PE.

$$\text{Nam } \left.\begin{array}{l} QS * QR * QI. \\ QL * QK * QI. \\ PG * PF * PE. \\ PE * PE * PE. \end{array}\right\} \text{ſunt } \div\div. \quad \left.\begin{array}{r} \text{item } QS.\ QL :: \\ PG.\ PE. \\ \text{Et } QI.\ QI :: \\ PE.\ PE. \end{array}\right\} \begin{array}{r} \text{ergò } QR. \\ QK :: \\ PF. PE. \end{array}$$

Not. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE; ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper

D K eodem ordine media inter D L, D I, quo fuerat D F inter D G, D E; erunt curvæ F B F, K B K analogæ, ſeu perpetuò D R . D K :: D F . D E.

Nam rurſus D S.* D R. *D I.
D L.*D K. *D I.
D G.* D F.* D E.
D E.*D E.*D E.
} ſunt ÷÷. unde DR . DK :: DF. DE.

Rurſus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ ſubſtitui poſſent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis A G B G, E B E; & altera F B F ſic ad iſtas relata, ut ductâ utcunque à deſignato puncto D recta D G, ſit perpetuò D F eodem ordine media proportionalis inter D G, D E; tum adſumatur linea H E L lineæ A G B analoga (ſeu talis, ut per D utcunque ductâ D L S, ſint perpetuò D S, D L in eadem ratione) ſit denuò linea K E K talis, ut ductâ utcunque D L, ſit perpetuò DK eodem ordine media inter D L, D I, quo prius D F inter D G, D E; erit itidem linea F B F lineæ K E K analoga.

Rurſus enim D S.*D R*D I.
D L.*D K*D I
D G.*D F*D E
D E.*D E*D E
} ſunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini ſunt proportionales. Unde liquet Propoſitum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua ſumptis quibuſcunque duobus terminis D, F; ſit terminorum à primo A (excluſivè) ad ipſum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem excluſivè) ad F, ſit numerus M; erit A —: D . A —: F :: N . M.

Nam eſto differentia communis, X. eſt ergò $D = A \pm NX$. & $F = A \pm MX$. quare $A —: D = NX$. & $A —: F = MX$. unde A —: D . A —: F :: (N X . M X ::) N . M.

XII. Hinc, ſi duæ fuerint ejuſmodi ſeries; & in utraque ſumantur bini, eodem ordine ſibi reſpondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in ſecunda) erit $A -: D . A -: F :: M -: P . M -: R$.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par eſt illi, quam habent ad ſe numeri N, M, quales in præcedente deſignati ſunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in ſerie quavis proportionalium; quales nos ſemper in ſequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; ſit autem illorum ſecundum B non majus horum ſecundo M; erit quodlibet in ſerie Geometrica majus eo, quod ipſi coordinatur in ſerie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M: N. O. P. Q.

Eſt enim $A + N \sqsubset 2M$ (vel $\sqsubset$) $2B = A + C$. ergò $N \sqsubset C$. unde $M + N \sqsubset B + C = A + D$. Eſt autem $A + O \sqsubset M + N$. ergò $A + O \sqsubset A + D$. Et ideò $O \sqsubset D$. ergò $M + O \sqsubset B + D = A + E$. Eſt autem $A + P \sqsubset M + O$. ergò $A + P \sqsubset A + E$; adeóque $P \sqsubset E$. ſimilique porrò diſcurſu quoad velis.

XIV. Hinc, ſi rurſus fuerint A, B, C, D, E, F $\div\div$ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q ſint $\div\div$ Geometricè; ſitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam ſi dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypotheſin.

Item, iiſdem poſitis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam ſi $F = Q$; conſtat ex præcedente fore $E \sqsubset P$ (ſcilicet utramque ſeriem invertendo) ſin $F \sqsubset Q$; potiori jure liquet fore $E \sqsubset P$.

XVI. Quinimò demùm, iiſdem poſitis, quodlibet in ſerie Arithmetica majus eſt coordinato quolibet in ſerie Geometrica; puta, C majus eſt quàm N.

Eſt enim E $\sqsubset$ P, ac indè D $\sqsubset$ O ; & hinc C $\sqsubset$ N.

XVII. Conſectatur hinc ; ſi fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E ſeſe interſecantes in B, ac ita verſus ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad poſitione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à deſignato puncto D projectâ D H ; ſit perpetuò D G Fig. 68. 69. inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter eaſdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F ſeſe mutuò contingunt.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifeſtum è præcedente.

XVIII. Ex iſthinc etiam (quod ſtrictim tranſcurrens moneo) diverſis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσυμπτωτοι definiuntur. Fig. 70. Sint nempe rectæ VD, BD poſitione datæ ; ſint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, ſit P φ conſtantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter eaſdem media Geometricè ; quia jam (a) rectæ E G, E φ ſemper eandem obtinent rationem, eſt linea φ φ φ recta ; (a) 12 hujus. verùm linea V F F eſt *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, ſi P F ſit inter ipſas P G, P E ſimpliciter media, ſed alia diverſi generis quædam *hyperboliformis*, ſi P F ſit alterius cujuſpiam ordinis media) atqui patet è penultima præmiſſa lineam φ φ φ eodem ordine reſpondenti lineæ V F F *aſymptoton* eſſe. quod an προὔργου ſit neſcio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâſſe.

XIX. A puncto aſſignato B ad datam poſitione rectam A C ductæ ſint rectæ tres B A, B C, B Q ; tum in Q C producta ſumatur ſumptum Fig. 71. quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci poteſt (ad alterutras ipſius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; ſit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejuſdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M).

Nam, primò, ſi B R ultra angulum A B C jaceat reſpectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas ſecans, ut vides ; & manifeſtum eſt, * è ſupra monſtratis fore, F E $\sqsupset$ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat verſus D ; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores ſint interceptis à B Q, B A ; * Per VI. 8 Lect. & ſumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rurſus Fig. 72. utcunque ductâ D N, quæ rectas interſecet, ut exhibet Schema ; quoniam

(b) Conſtr. niam jam eſt KF (b) $\sqsupset NF$; & $KE^{*} \sqsubset MF$; perſpicuum eſt reſtare $FE \sqsupset NM$.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci poteſt, quæ minores ipſis MN intercipiat; (a) poteſt autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipſis FE; unde totum liquet Propoſitum.

Fig. 73. XX. In recta DZ ſint tria puncta D, E, F; & in F ſit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera ſecet recta DBC; per E verò ducta ſit recta EG; poteſt ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK ſit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo caſu, ubi punctum E puncto D vicinius eſt, (ob ſimilitudinem triangulorum (a) 19. hujus. ENM, FKI) manifeſtum eſt fore $MN \sqsupset IK$; (a) poteſt autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores ſint interceptis MN; ergò liquet.

In altero caſu, ubi punctum F ipſi D propius, ſumatur SL æqualis Fig. 74. ipſi CB; & connectatur EL; Eſtque jam $IK . MN :: FK . EN ::$ (c) Conſtr. $DF . DE :: FC . ES :: BC . RS$ (c) $:: LS . RS$ (d) $\sqsubset QN .$ (d) 6. Lect. VI. MN. quapropter eſt $IK \sqsubset QN$. (a) poteſt autem ab E recta duci, ceu EH, ſic ut ab EG, EH interceptæ OP minores ſint interceptis QN. quamobrem abundè conſtat Propoſitum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; ſitque recta BO æqualis curvæ BA; ſumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum eſt inter bina puncta intervallum, eſt $BK + KO \sqsubset BO = BK + KA$. ergo $KA \sqsubset KO$.

XXII. Hinc, utcunque ſumptis (ad eaſdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit $KL + LO \sqsubset KA$.

Nam, ſupra contactum verſus A, eſt $KL + LO \sqsubset KO \sqsubset KA$.

Infra verò, eſt $KL + LB \sqsubset KB$ (ex hypotheſibus *Archimedæis*) adeóque $KL + LO \sqsubset KA$.

Lect. VIII.

Mihi ſanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *ſapiens ille Scurra, perquam exiguæ Civitati portas ingentes extruxiſſe.* Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propiùs enitimur. ad illam.

I. Hæc adſumimus. Si duæ lineæ (O M O, T M T) ſeſe contingant, angulos ipſæ comprehendunt (O M T) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ : Si duæ lineæ (O M O. T M T) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ ſeſe contingent (contingentibus ſaltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc ; Si duas lineas O M O, T M T tertia quæpiam linea P M P contingat, ipſæ etiam lineæ O M O, T M T ſeſe contingent.

Nam quoniam lineæ O M O, P M P ſeſe contingunt, erit angulus O M P quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum T M T, P M P *contractum*, erit *angulus* T M P quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus T M O *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ O M O, T M T ſe mutuò contingent.

III. Tangat recta F A curvam F X in F ; ſitque poſitione data recta F E ; ſint item duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ductâ utcunque rectâ I L ad E F parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit ſemper intercepta K L æqualis interceptæ I G ; etiam curvæ E Y, E Z ſeſe contingent. Fig. 78.

Si non tangant, poteſt inter ipſas conſtitui angulus rectilineus, puta B E C ; hunc utcunque ſecet ad F E parallela I L ; ſumatúrque G H = B C, & connectatur F H ; ſunt igitur è parallelis ad F E à rectis

F G, F H interceptæ pares interceptis ab E B, E C; hoc eſt minores interceptis à curvis E Y, E Z; hoc eſt minores interceptis à curva F X, & recta F A; quapropter angulus X F A rectilineo H F G major eſt; unde recta F A curvam F X non tangit, contra *Hypotheſin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta F A curvam F X, & ſint duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ I L (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper K L = I G; curvæ E Y, E Z ſeſe tangent.

(a) 20 Lect. VII. Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* B E C; quem utcunque a D projecta ſecet recta D L; (a) poteſt jam ab F recta duci (puta F H) talis, ut ſint è projectis à D a rectis F G, F H interceptæ minores interceptis ab ipſis E B, E C, hoc eſt multo minores interceptis à recta E A, curvâque F X. Unde ſequetur angulum A F X rectilineo G F H majorem eſſe; ac idcircò rectam A F non contingere curvam F X, adverſus *Hypotheſin*.

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas I G, K L quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

V. Sit recta V E I, duæque curvæ Y F N, Z G O ſic ad ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad poſitione datam A B parallelâ, habeant interceptæ E G, E F ſemper eandem rationem inter ſe; tangat autem recta T G curvarum unam Z G O in G (cum recta V E conveniens in T) ducta T F alteram Y F N quoque continget.

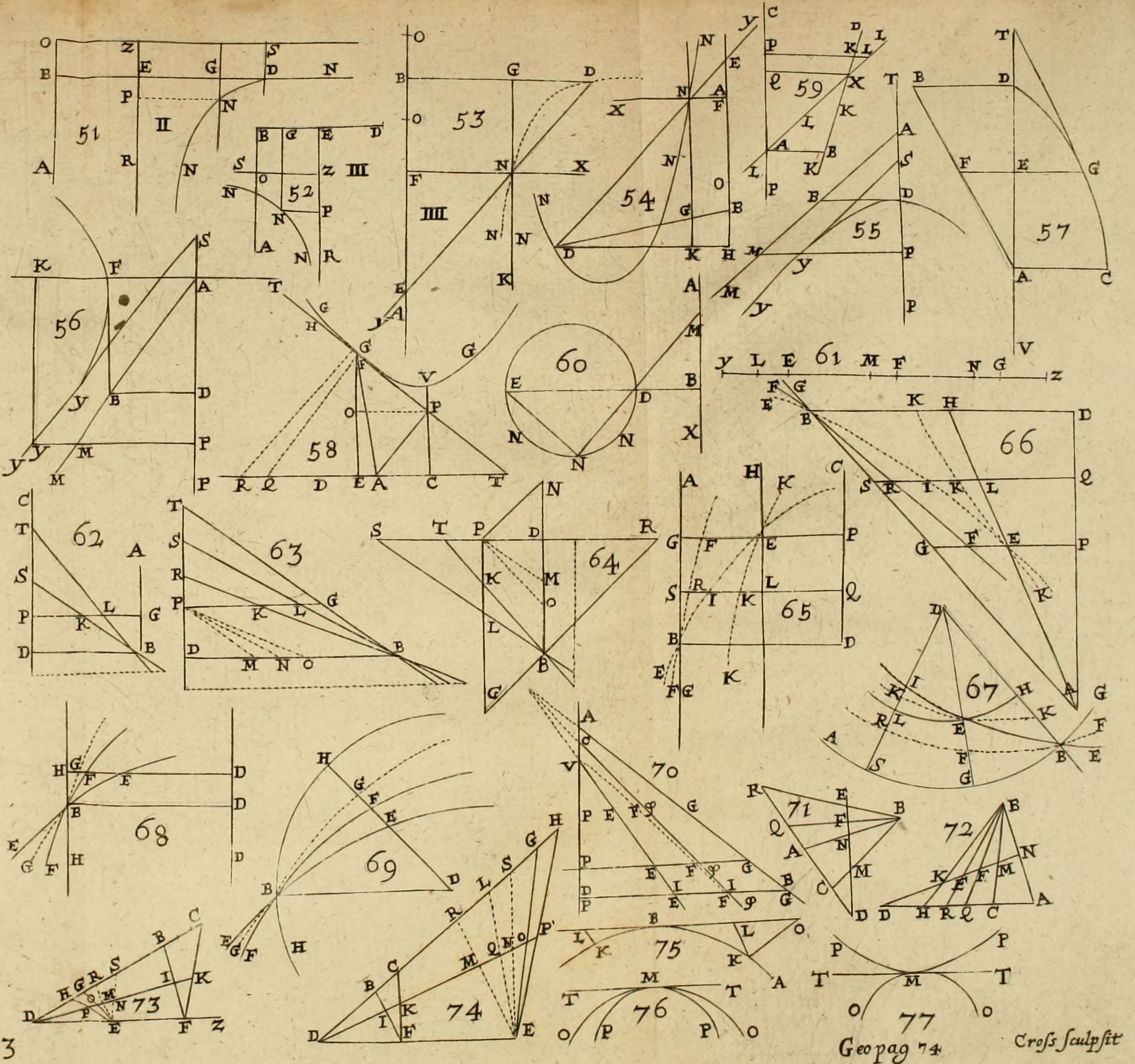
Nam utcunque ducatur recta I L (lineas expoſitas ut vides interſecans) Eſt igitur I L . I N (a) ⊏ I O . I N :: E G . E F :: I L . I K. Igitur I N ⊐ I K. ergò punctum K extra curvam Y F N jacet; totaq; recta T F.

(a) Hyp.

Aliter. Eſt I L . I K :: (I O . I N :: I K — I O . I K — I N ::) O L . N K, ergò cùm lineæ G L, G O ſe (b) tangant, (c) etiam lineæ F N, F K ſeſe tangent.

(b) Hyp.
(c) Schol. 4. hujus.

Fig. 80. VI. Etiam ſi tres curvæ X E M, Y F N, Z G O ità referantur ad ſe, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper E G, E F in eadem ratione, concurrant autem duarum X E M, Z G O tangentes E T, G T in T; adjuncta T F curvam Y F N tanget.


51
II
52
III
53
IIII
54
59
55
57
56
58
60
61
66
62
63
64
65
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77

3

Geo pag 74

Croſs ſculpſit

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N. * quapropter erit punctum K extra curvam Y F N.

* 2. Lect. VII.

Poſſit hæc, ut præcedens, aliter oſtendi ; ſed verbis pluribus.

Curvas ità ſitas concipe quales figura monſtrat. nam ϛενολεσχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans caſus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique ſubnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad ſe rectæ D E, D F rationem ſemper eandem ; unam verò Y F N tangat recta F S ; cui parallela ſit E R ; tanget recta E R curvam X E M.

Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas interſecans, ut vides). Eſtque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M ; ergò quum ſit D K $\sqsubset$ D N ; erit D I $\sqsubset$ D M ; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem ſemper eandem obtinent ; unde res aliter conſtat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut ſi ab aſſignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem ſemper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G ; oportet curvæ Y F N tangentem ad F deſignare.

Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ ſecet rectas T E, T G punctis I, L, & iſtam curvam in K) habeant ſemper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S ; (*a*) eſt igitur I K $\sqsubset$ I N ; quare curva T F K curvam Y F N tangit : (*b*) eſt autem curva T F K *hyperbola* ; hanc tangat F S ; (*c*) illa quoque curvam Y F N tanget.

(*a*) 2 Lect. VIII.
(*b*) 4 Lect. VI.
(*c*) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hìc primum injecta eſt mentio ; hujus (unà cum aliarum omnium conſimili ratione procreatarum ſeu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad poſitione datam parallelâ, ſit ſemper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui ſpatio ; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V D concurrens in T ; ſumatúrque D S = D T ; & connectatur F S ; hæc curvam Y F N tanget ad F.

Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela, lineas expoſitas ſecans,

cans, ut vides. Eſtque TP . PM ⊏ (TP . PI : :) TD . DE item SP . PK : : SD . DF. ergò TP × SP . PM × PK ⊏ TD × SD . DE × DF : : TD × SD . PM × PN. Verum TD × SD ⊏ TP × SP; ac indè magìs TD × SD . PM × PK ⊏ TD × SD . PM × PN. quare PM × PK ⊐ PM × PN; vel PK ⊐ PN. Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipſi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *aſymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam ſit punctum D; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF; ſit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam verò curvam XEM tangat recta ER; alterius ad F tangens ita determina-
Fig. 84. tur: Ducatur DP ad ER perpendicularis: factóque DP . Z : : Z . DB; biſecetur DB in C; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis; hæc curvam YFN tanget.

Nam centro C per F deſcribatur *Circulus* DOB; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas interſecans, ut vides; eſtque DO ×
(a) 27 Lect. VI. DI (a) = DP × DB (b) = Zq (c) = DM × DN vel DO . DM
(b) Conſtr. : : DN . DI. ergò quum ſit DM (c) ⊐ DI; erit DO ⊐ DN;
(c) Hyp. itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

XI. Curvæ XEM, YFN tales ſint, ut ductâ quâpiam FE ad poſitione datam parallelâ, ſit ſemper hæc æqualis eidem alicui; curvàm
Fig. 85. autem YFN tangat recta SF; huic parallela RE alteram XEM continget.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ eſt NI ⊐ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, &c.

Reverà linea XEM nil aliud eſt, quàm ipſa YFN *tranſlocata*. Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propoſitum.

XII. Sit curva quæpiam XEM, quam tangat recta ER ad E; ſit
Fig. 86. item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, ſit ſemper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z; curvæ YFN tangens (ad F) ità deſignatur: Sumatur DH = Z; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipſi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela; ſumatúrque GL = GB; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Nam *aſymptotis* E R, A B per F deſcripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expoſitas ſecans, utì cernis. Eſtque QO (*a*) $= DP$; (*b*) quare $MO \sqsubset DP$ (*c*) $\sqsubset DH$ (*b*) $= MN$. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit.

(*a*) Converſ. 9. Lect. VI.
(*b*) Hyp.
(*c*) Elem.

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget.

(*d*) 9. hujus.

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipſi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, ſeu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad poſitione datâm quandam parallelâ, poſſit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat $PEq . PFq :: PT . PS$; connexa S F curvam D F G tanget.

Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit perpetuò $QKq = QHq + Zq$; unde quoniam eſt QK (*a*) $\sqsubset QI$; erit $QKq - Zq \sqsubset QIq - Zq$; hoc eſt $QHq \sqsubset QGq$; ergo curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) eſt autem curva V F H *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget.

(*a*) Hyp.
(*b*) 22. Lect. 6.
(*c*) Cor. 22. Lect. I.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z poſſit quadratum ex P F; fiatque $PEq . PFq :: PT . PS$; & connectatur F S; hæc rurſus ipſam G F G continger.

Fig. 88.

Similis eſt demonſtratio; ſed adhibe 23^am^ primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità verſus ſe relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſumma quadratorum ex ipſis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat $EFq . EGq :: ER . ET$; connexa G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R ſecet punctis K, Q, curvam O G O in O) ſit $QKq + QO = Zq$; erit ideò $QKq + QOq = QIq + QLq$; & cùm ſit QKq (*a*) $\sqsubset QIq$, erit ideò $QOq \sqsupset QLq$. itaque curva O G O curvam C G D (introrſum) tangit. (*b*) Eſt autem (ex oſtenſis)

(*a*) Hyp.
(*b*) 24. Lect. VI.

oſtenſis) curva O G O *Ellipſis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90.

XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) ſit etiam alia curva V G C ad iſtam ſic relata, ut à deſignato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, ſit E G æqualis ipſi Z F; ſit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; ſumatúrque Q R æqualis ipſi Z E; connexa recta G R ipſi curvæ V G C perpendicularis erit.

(a) *Hyp.*
(b) 25 Lect. VI

Nam ducatur F T ad ipſam F Q perpendicularis, ſeu curvam AFB tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quàcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O ſecet punctis H, K, O) connexâque Z K, ſit H O = Z K; tum ductâ Z I. quoniam H K (*a*) $\sqsubset$ H I, erit Z K $\sqsubset$ Z I, vel H O $\sqsubset$ H I; quare curva O G O curvam V G C tangit. (*b*) Eſt autem O G O (ex oſtenſis) *Hyperbola*, cui perpendicularis eſt recta G R; eadem itaque GR curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

Fig. 91.

XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad poſitione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas ſecet, ut perſpicis) connexâque rectâ D Y, ſit ſemper R Y . D Y : : D Y . E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam deſignare.

(a) 12 Lect. VI.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O ſecet punctis G, P, O) connexâque D O ſit ſemper G O . D O : : D O . P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam ſecet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos ODP, DGP æquari; quare cùm angulus D S P major ſit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; eſt autem curva DYO *hyperbola* (*a*) ſuperius determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

Not. Si curva D R S ſit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *ciſſois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis ſimiliter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92.

XVIII. Poſitione datæ ſint rectæ D B, B K; ſitque curva D Y X talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K ſecet in H, curvam D Y X in Y) ſit perpetuò ſubtenſa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; eſtque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum RDY triangulo D B H ſimile ac æquale; quare R Y . Y D : : (D H . H B) : : Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis eſt recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K poſitione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K ſecet in H, curvámque B X X in X) ſit perpetuò H X ipſi B H æqualis; deſignetur oportet recta curvam B M X tangens in X.

Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò ſit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipſi B K occurrens in R; tum *aſymptotis* R B, R T per X deſcripta cenſeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expoſitas ſecans, ut vides) Eſtque jam O M (*a*) = D I) $\sqsupset$ (*a*) (D L (*b*) =) O N; ergò *hyperbola* NXN curvam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipſam curvam B X X quoque continget.

a) *Conſtr.*
(*b*) *Converſ.* 9, Lect. VI.

Cæterùm ſatis pro hac vice nugati videmur; ceſſemus aliquantiſper.

LECT. IX.

QUod ingreſſi ſumus iter actutùm rectà proſequemur.

I. Sint rectæ A B, V D ſibi parallelæ; quas ſecat poſitione data
Fig. 94. D B; tranſeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad ſe relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, ſit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine deſignato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) deſignare.

(a) 12. Lect. VII. Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (a) explicuimus ſupra) exponentes; fiatque N . M :: D S . D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

Nam utcúnque ducta ſit recta P G, dictas lineas ſecans, utì cernis:
(b) 11. Lect. VII. Eſtque F G . E G (b) :: N . M :: (c) D S . D T :: (d) L G . K G; cùm ergò (e) ſit K G $\sqsupset$ E G; erit L G $\sqsupset$ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam conſiſtere.
(c) *Conſtr.*
(d) 3. Lect. 7.
(e) *Hyp.*

II. Reliquis perſtantibus iiſdem, ſit jam PF inter PG, PE media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit prius Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

(a) 17. Lect. 7. Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo conſtructæ lineæ ſeſe mutuò (a) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è ſex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S . D T :: 3 . 7.

Fig. 95. III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypotheſi, ſumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta ſimili pacto deſignatur.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipſam D B parallela, ſecans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N . M ::

M : : P X . P Y ; connectatúrque recta F Y ; hæc curvam F B F continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E tranſiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectáſque C E, V P in I ac Q ſecante) ſit ſemper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam conſtat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (*a*) analoga eſt curva F B F ; (*b*) ergò recta F Y curvam F B F quoque continget. *a* 7. Lect. 7. *b* 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, poſito lineam E B E rectam eſſe, quòd linea F B F parabolarum ſeu paraboliformium aliqua ſit. quare quod de his paſſim obſervatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, neſcio tamen an uſpiam Geometricè oſtenſum) ex immenſùm uberiore fonte manat, ad iunumeras aliorum generum curvas ſe diffundente.

V. Hinc apertè conſectatur ; ſi T D ſit recta, ſintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad ſe relatæ, ut ductis rectis P E F ad poſitione datam B D parallelis, ſint ordinatæ P E ſemper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejuſdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas haſce contingant ; erit $TP = 2\,SP$; Quòd ſi ordinatæ P E ſe habeant ut ipſarum P F cubi, erit $TP = 3\,SP$; ſi P E ſint ut quadrato quadrata ipſarum P F, erit $TP = 4\,SP$; ac ſic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B tranſeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, ſit ſemper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) deſignare. Fig. 97.

Hoc (certè (*a*) generatim quadantenus præſtitum) è re fuerit hìc ſpeciatim apertiùs atque pleniùs exequi : Quorſum ſit D Q ad D B perpendicularis, quam ſecet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget. *a* 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; ſecentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut ſit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; pérque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *aſymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas inter- Fig. 97.

a Converſ. 4. Lect. VI. interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK . PL :: (*a*) M . N
:: (*b*) GE . GF (*c*) ⊏ PE . PF ⊏ PK . PF; quare PL ⊐ PF;
b 11. Lect. VII. igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB
c 1. Lect. VII. cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ . ZB :: BS . ST. unde
RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS . SX :: (*d*)
d Conſtr. BS . SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY
= DS × CX. vel RZ . CX :: DS . ST; compoſitéque RZ . RZ
+ CX :: DS . DT :: (*d*) N . M :: CZ . CZ + CX. itaque
diviſim eſt RZ . CX :: CZ . CX. adeóque RZ = CZ; unde RB
hyperbolam LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi
LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

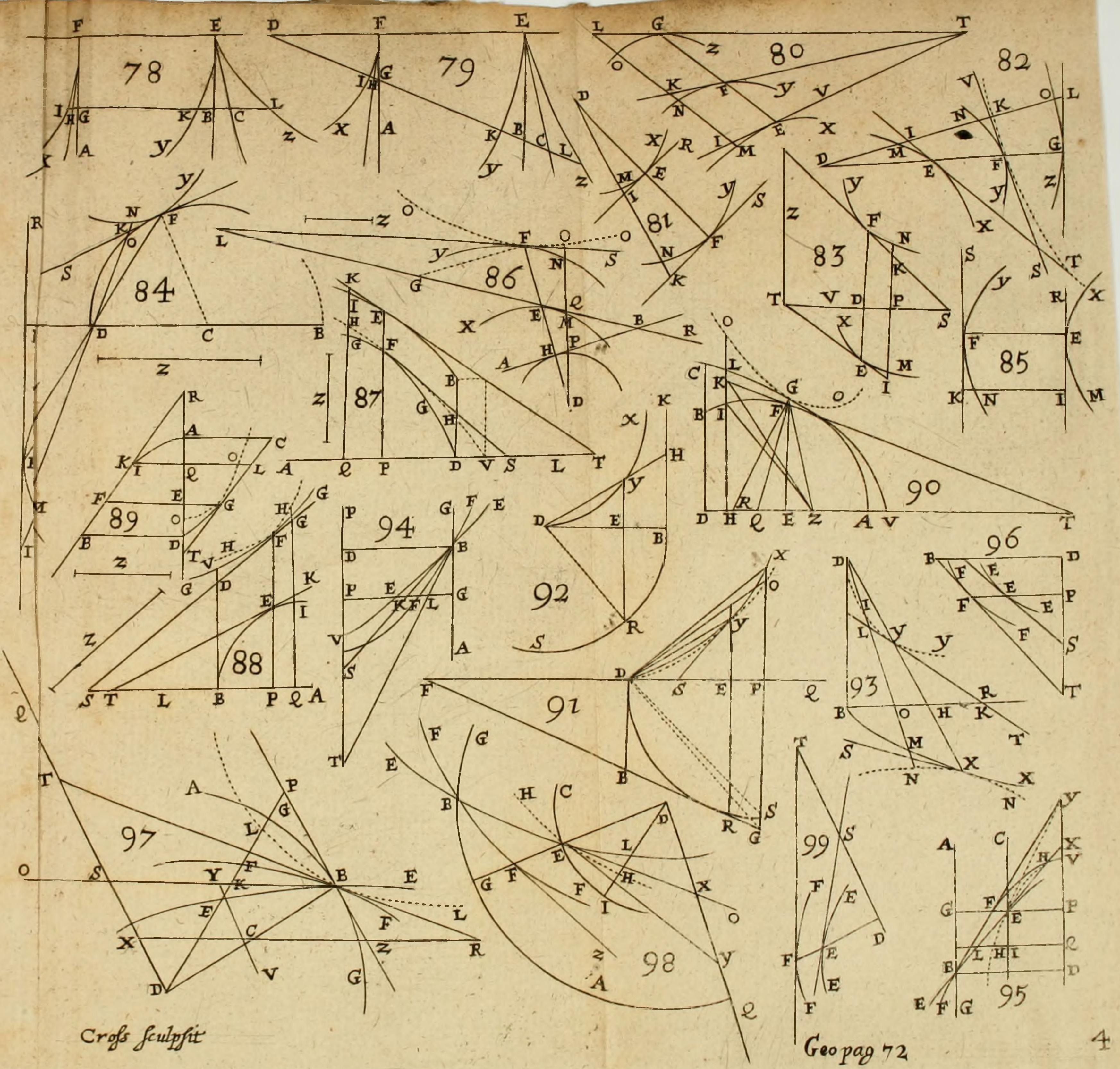
Fig. 98. VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX . DY :: N . M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG,
DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH
a 9. Lect. VII. tanget; verùm ipſi HEH (*a*) analoga eſt curva FBF; (*b*) quare
b 7. Lect. VIII. recta FZ curvam FBF quoque tanget.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99. IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas
DEF


78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

Croſs ſculpſit

Geo pag 72

4

DEF concurrentes punctis S, T; erit ſemper $DT = 2DS$. Quòd ſi DE ſunt ut cubi ipſarum DF, erit ſemper $DT = 3DS$; ac ſimili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decuſſet poſitione data recta DB; tranſeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, ſit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE; oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus ſunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \left.\begin{matrix}+M\\-N\end{matrix}\right\} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta ſit PG, dictas lineas ſecans ut vides. Eſtque $EG . FG ::$ (a) $M . N$. ergò $FG \times TD . EG \times TD :: N \times TD . M \times TD$. Item $EF \times RD . EG \times TD :: M - N \times RD . M \times TD$. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD . M \times TD$; (hoc eſt) $::$ (b) $RD . SD$. (c) Eſt autem $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. quare $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD$. hinc, cùm ſit EG (d) $\sqsubset KG$; erit $FG \times TD + EF \times RD \sqsubset LG \times TD + KL \times RD$; vel $FG . EF + TD . RD \sqsubset LG . KL + TD . RD$; ſeu (demptâ communi ratione) $FG . EF \sqsubset LG . KL$. vel componendo $EG . EF \sqsubset KG . KL$ (e) $\sqsubset EG . EL$. unde eſt $EF \sqsupset EL$. itaque punctum L extra curvam FBF ſitum eſt; adeoque liquet Propoſitum.

(a) 11. Lect. VII.

(b) Conſtr.

(c) 4. Lect. VII.

(d) Hyp.

(e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis ſtantibus iiſdem, ſi PF ſupponatur ejuſdem ordinis Geometricè media liquet (planè ſicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF ſit è ſex mediis tertia, ſeu $M = 7$; & $N = 3$; erit $3TD + 4RD . 7MD :: RD . SD$; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem conſimili pacto deſignari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, ſecans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiatque $N \times TP \left.\begin{matrix}+M\\-N\end{matrix}\right\} \times RP$. Fig. 101.

$M \times TP :: RP . SP$; & connectatur SF ; hæc curvam FBF tanget ; id quod omnino ſimili diſcurſu demonſtratur, quo tertia hujus ; tantùm hîc (non per E ad VD parallela ducitur, at) connectitur ET ; & loco ſeptimæ allegatur octava ſeptimæ Lectionis. quid plura ?

XIII. Adnotetur, ſi linea EBE ſit recta, (rectæ nempe BR coincidens) eſſe lineam FBF ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diverſi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi ſumus.

Fig. 102. XIV. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem partes puncti D (vel P) cadant ; curvæ FBF tangens (BS) deſignatur faciendo $N \times RD - : \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD . M \times TD :: RD . SD$.

Simili planè diſcurſu conſtat hoc, tantùm (quartæ loco) ſeptimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipſoidum* omnium (poſito nempe lineam EBE rectam eſſe, lineæ BR coincidentem) aſt aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si PF ſit è quatuor mediis quarta, ſeu $M = 5$; & $N = 4$; erit $SD = \frac{5TD \times RD}{4RD - TD}$.

Notetur; Si contigerit eſſe $ND \times RD = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD$, eſſe DS infinitam ; ſeu BS ipſi VD parallelam. Alia poſſent adnotari ; ſed relinquo.

Fig. 103. XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Ciſſois* & *Ciſſoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique ſemirectus angulus DSB ; curvæque duæ SGB, SEE ſic ad ſe referantur, ut ductâ liberè rectâ GE ad BD parallelâ, (quæ lineas expoſitas, ut conſpicis, ſecet) ſint PG, PF, PE continuè proportionales ; tangat autem recta GT curvam SGB in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo $2TP - SP . TP :: SP . RP$; utique connexa RE curvam SEE tanget. Id quod è præmiſſis facilè colligitur. Quòd ſi jam curva SGB ſit circulus, & applicationis angulus SPG

ſit rectus, erit curva S E E *Ciſſois vulgaris*, ſeu *Dioclea*; alioquin alterius generis *Ciſſoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perſtringo. Neq; jam amplius vos detinebo.

LECT. X.

INſtitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I ſic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad poſitione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G ſecet in E, curvámque A F I in F (ſit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, ſitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propoſitas ſecans, ut cernis; éſtque $GK = GH + HK = GH + HT$ (a) $\sqsubset$ arc. $AG = GI$; unde punctum K extra curvam A F I ſitum eſt; adeóque recta T K ipſam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd ſi recta E F quamlibet ad arcum A E rationem ſemper eandem habeat, nihilo ſeciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis ſexta manifeſtæ conſectatur.

Hæc antea pridem aliter oſtendimus; aſt hæc demonſtratio ſimplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam inſinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque deſignatum D; ſit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, ſit ſemper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) deſignare. Fig. 105.

Fiat $TE =$ arc. A E; ſitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F ſecet in K, rectámque T E in H)

(a) 17. Lect. VIII.
(a) 22. Lect. VII.

ſit ſemper $HK = HT$; tum curvam T K F (a) tangat recta F S in F; hæc curvam A I F quoque continget.

Eſt enim $GK = GH + HK = GH + HT$ (a) $GA = GI$. quare punctum K extra curvam A I F jacet; adeóque recta F S curvam A I F continget.

IV. Quòd ſi recta E F ad arcum A E eandem aliquamcunque ſtatuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106.

V. Sint recta A P, duæque *curvæ* A E G, A F I, ità ad ſe relatæ ut ductâ utcunque rectâ D E F (quæ rectam A P, curvas A E G, A F I punctis D, E, F, ſecet) ſit ſemper recta D T æqualis arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G ad E; ſumatúrque E T par arcui E A; & ſit T R ad B A parallela; connectatur denuo recta RF; hæc curvam A F I tanget.

(a) 22. Lect. VII.
(b) 26. *Lect.* VI.
* *Hyp.*
(c) 3 Lect. VIII.
(d) 2. Lect. VIII.

Concipiatur enim curva L F L talis; ut ductâ quâcunque rectâ P L ad A B parallelâ (quæ curvam A E G in G, rectam T E in H, curvam L F L in L ſecet) ſit perpetuò recta P L æqualis ipſis T H, H G ſimul; eſt itaque PL (a) $\sqsubset$ arc. A E G* $= PI$. Unde curva L F L curvam A F I tangit. Item recta I K (b) æquatur rectæ T H; (c) adeóque curva L F L rectam R F K tangit; (d) quare curvam A F I tanget recta.

VI. Etiam ſi rectæ D E ad arcus A E quamlibet ſemper eandem rationem habeant, recta R F nihilominus curvam A F I tanget, ut ex hac, & ſexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107.

VII. Sit punctum D; duæque curvæ A G E, D I F ità verſus ſe relatæ ſint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ D F E, ſit perpetuò recta D F æqualis arcui A E; tangat autem recta E T curvam A G E ad E; deſignanda jam eſt recta, quæ curvam D I F tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII.

Sumatur E T par *arcui* F S; concipiatúrque *curva* D K K talis, ut à D projectâ utcunque rectâ D H (quæ curvam D K K in K, rectam T E in H ſecet) ſit perpetuò $DK = TH$; tum curvam D K K (a) tangat recta F S ad F; hæc curvam D I F quoque tanget.

(b) 22. Lect. VII.
(c) *Hyp.*
(d) 4. Lect. VIII.

Intelligatur enim *curva* L F L talis, ut à D projectâ quapiam rectâ D H (quæ rectam T E ſecet in H, curvam L F L in L) ſit ſemper $DL = TH + HG$; eſt itaque DL (b) $\sqsubset$ arc. A G (c) $= DI$; (d) itaque curvæ D I F, L F L ſeſe (b) contingent. item curvæ KFK,

L F K

LFK ſeſe contingunt. (*e*) quare curvæ D I F, K F K ſe quoque contingent. (*e*) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (*e*) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd ſi rectæ D F quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam D I F tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H poſitione data; ſit item curva A G B talis, Fig. 108.
ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H ſecet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta deſignetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O ſecet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, ſit V L . A Q : : X . Y; eſtque curva O G O (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductáq; ſit N R ad G F parallela, ſit V L + L K . A R : : X . Y; manifeſtum eſt curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [ſecet enim recta D L curvam A E B in I, ducaturque I P ad G F parallela; quum ergò ſit V L + L K . A R : : X . Y : : A K . A P, & ſit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B ſemper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; ſimilíque planè diſcurſu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O ſeſe (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur, Hujuſmodi plura quædam cogitaram hîc inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam, curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

Fig. 109.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem $DE . DF :: R . DT$; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 110.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum $LF . LK :: (DF . DT ::) DE . R$; adeóque $LF \times R = LK \times DE$. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) $LF \times R$ æquale ſpatio P D E G; ergò $LK \times DE = PDEG \sqsupset DP \times DE$. Unde eſt $LK \sqsupset DP$; vel $LK \sqsupset LI$.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimilique jam planè diſcurſu conſtabit fore $LK \times DE = PDEG \sqsubset DP \times DE$, unde jam erit $LK \sqsubset DP$, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur $DE \times DT$ æquari ſpatio V D E Z.

Fig. 111.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ita relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z; ſumatur autem $DQ = DE$, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia VDEZ; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque V I F tangat recta F T ; item lineam V K F tângat recta F S. Eſt ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = VDEZ. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F Dq. unde conſtat angulum Q F S rectum eſſe. quod Propoſitum erat.

(a) 5. Lect. IX.
(b) Cor. præc.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, DE, &c. ab initio D A continuò decreſcant) tum altera ſit curva D K E, priorem interſecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z ſecet in G, curvam D K E in K) ſit perpetuò rectangulum ex D K, & deſignatâ quâdam lineâ R æquale ſpatio A D G ; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, ſit D T = 2 R ; & connectatur T E ; hæc curvam D K E continget.

Fig. 112.

Nam ſumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG ; & ſumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (ſecans ipſam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decreſcunt projectæ verſus Z ; unde E X verſus A intra curvam E G A cadet ; eatenus ſaltem, quatenus huic Propoſito ſatisfaciet). Sit jam primò punctum G ſupra E, verſus initium A, & ob T D . D E :: R L . L E ; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 GDE ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⊏ E X ⊏ L Y. Eſt autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K ; ergò magìs punctum R eſt extra curvam.

Fig. 113.
(a) Hyp.

Sit rurſus punctum G infra punctum E, verſus Z ; eſtque rurſus, utì priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Eſt autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rurſus extra curvam exiſtit. Liquidum eſt igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd ſi punctum aliud in curva D K E deſignetur, puta K ; per quod ducta ſit D K G ; & fiat D G . D K :: R . P ; ſumatúrque D T = 2 P ; & connectatur T G ; tum ducatur K S ad G T parallela ; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G tranſiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G ſecet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) ſit ſemper D O × P æqualis ſpatio A D N ; erit ideò D M × R = D O × P ; ac proinde D M . D O :: P . R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q : : 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P. P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q : : 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema* :

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G : : D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis. Fig. 114.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant âutem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q : : $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H . D K : : $\frac{DK}{2}$. D T; hoc eſt (quoniam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K : : ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$: :) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

* *In* 12. *hujus.*

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M,

Fig. 115.

rectam A P ſecare ad T; ut ipſius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum ſtatuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P $= m$; P T $= t$; M R $= a$; N R $= e$; reliquáſque rectas, ex ſpeciali curvæ natura determinatas, utiles propoſito, nominibus deſigno; ipſas autem M R, N R (& mediantibus illis ipſas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehenſam inter ſe comparo; regulas interim has obſervans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum a, vel e poteſtas habetur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe (etenim iſti termini nihil valebunt).

2. Poſt *æquationem conſtitutam*, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas, ſeu determinatas deſignantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini ſemper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipſam m; (vel M P) pro e ipſam t (vel *P T*) ſubſtituo. Hinc demùm ipſius P T quantitas dignoſcetur.

Quòd ſi calculum ingrediatur curvæ cujuſpiam indefinita particula; ſubſtituatur ejus loco tangentis particula ritè ſumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è ſubnexis Exemplis clariùs elucefcent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus ſit; & ſit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H ſecet in K, curvam A M O Fig. 116.
in M, ſit ſemper ſubtenſa A M æqualis abſciſſæ B K; hujus curvæ ad M tangens eſt deſignanda.

Fiant quæ ſuprà præſcripta ſunt, & (ductâ A N L) nominetur A B $= r$; & A P $= q$; unde A Q $= q - e$; item Q N $= m - a$. ergò eſt $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma =$ (A Q q + Q N q = A N q =) B L q; hoc eſt (rejectis, uti monitum eſt, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma =$ B L q. Porrò eſt A Q. Q N :: A B. B L; hoc eſt $q - e . m - a :: r .$ B L $= \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} =$ B L q; ſeu (rejectis ſuperfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} =$ B L q $= qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc eſt (abjectis iis, quæ præſcripſimus abjicienda) $= 2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò ſubſtituendo m pro a, & t pro e, eſt $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Sit recta E A (poſitione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E. Fig. 117.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $= f^3 + 3ffe$. Item NQ cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc eſt) $= m^3 - 3mma$. Quapropter eſt $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. $+ NQ$ cub. $= AE$ cub. $=$) r^3. abjectiſque datis, eſt $3ffe - 3mma = 0$. ſeu, $ffe = mma$; ſubrogatiſque loco a, & e ipſis m, & t, erit $fft = m^3$; ſeu $t = \frac{m^3}{ff}$; eſt ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq + MPqq = AEqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Poſitione data ſit recta A Z, & A X magnitudine; ſit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, ſit A P *cub.* + P M *cub.* $= AX \times AP \times PM$. Fig. 118. La Galande

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & AQ *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & QN *cub.* $= m^3 - 3mma$. & $AQ \times QN = fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde $AX \times AQ \times QN = bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; ſeu amoliendo rejectanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; ſubſtituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; ſeu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* C M V (ad circulum C E B pertinens cui centrum A,) cujus axis V A; ordinatæ C A. M P ad V A perpendiculares.

Protractis rectis A M E, A N F, ductíſque rectis E K, F L ad A B perpendicularibus, dicantur arcus C B $= p$; radius A C $= r$; recta A P $= f$; A M $= k$. Eſtque jam C A arc. C B :: N R. arc. F E. hoc eſt, $r.\,p :: a.\,\frac{pa}{r}$ = arc. F E. & A M. M P :: A E. E K; hoc eſt, $k.\,m :: r.\,\frac{rm}{k}$ = E K; item A E. E K :: arc. F E. L K. hoc eſt $r.\,\frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r}.\,\frac{pma}{rk}$ = L K. Verùm A M. A E :: A P. A K; hoc eſt $k.\,r :: f.\,\frac{rf}{k}$ = A K. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk}$ = A L. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis ſuperfluis) = A L q; adeóque L F q = $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$. Fig. 119.

Eſt autem A Q q. Q N q :: A L q. L F q; hoc eſt Q: $f - e$. Q: $m + a$ :: A L q. L F q. hoc eſt $ff - 2fe.\,mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.\,rrmm + 2fmpa$. Unde (ſublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; ſeu $kkpa - rrfa = rrme$; vel ſubſtituendo juxta *præſcriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur eſſe rectam A T $= \frac{kk}{rr}p$; hoc eſt (quoniam, ut notum eſt, A V $= \frac{rr}{p}$) erit A T $= \frac{\text{AMq}}{\text{AV}}$; ſeu, A V. A M :: A M. A T.

Exemp. V.

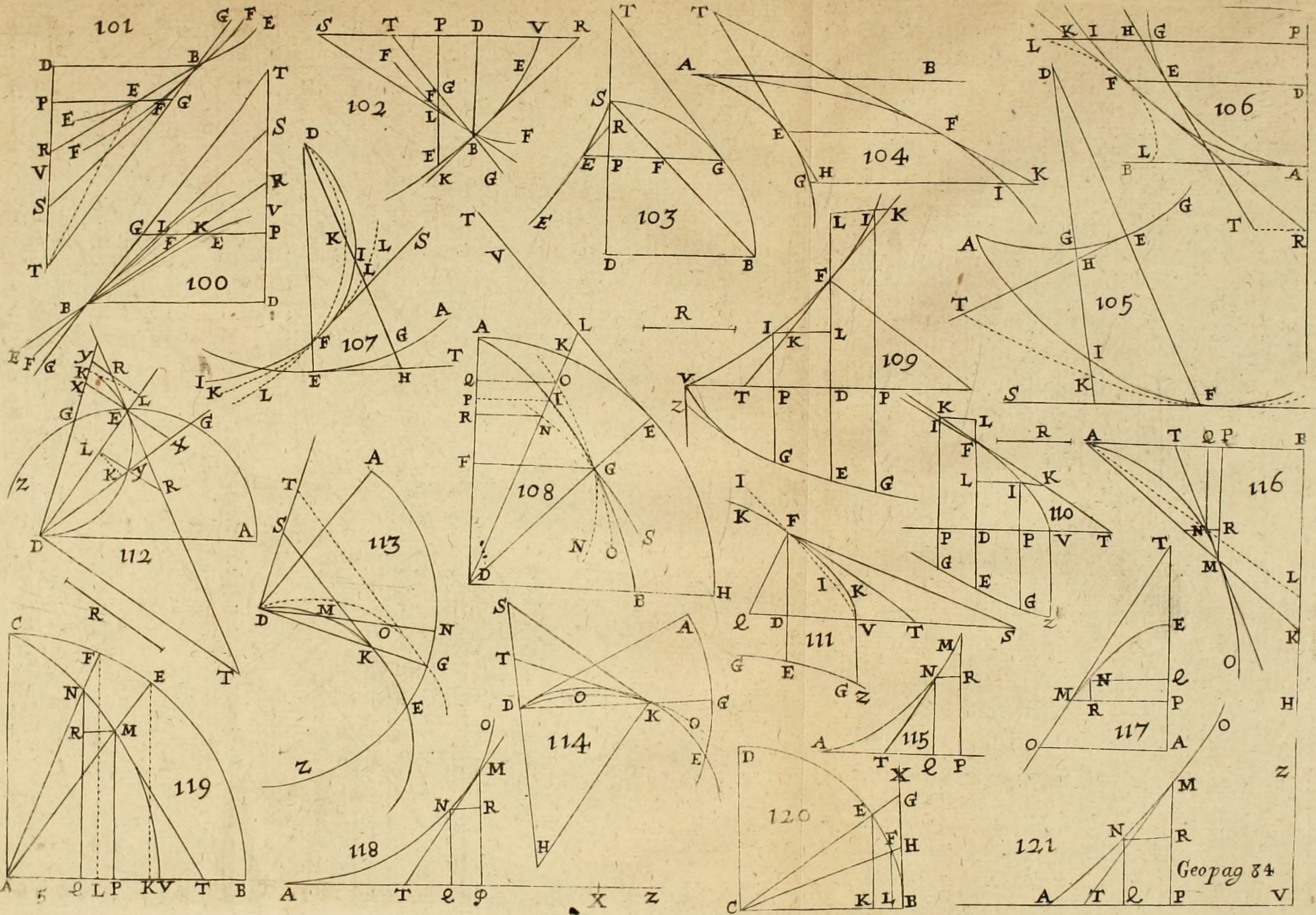
Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque ſumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectáque P M ad A V normali, ſit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demiſſis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B $= r$. C K $= f$: K E $= g$. Et quoniam eſt C E . E K :: arc E F . L K; vel C E . E K :: Q F . L K; hoc eſt $r . g :: e . \frac{ge}{r}$ = L K; erit C L $= f + \frac{ge.}{r}$ Et L F $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge.}{r}}$

Eſt autem C L . L F :: (C B . B H ::) C B . Q N. hoc eſt, $f + \frac{ge.}{r} \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a.$ vel (quadrando) $ff + \frac{2fge.}{r} gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma.$ Unde (dimiſſis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme.$ unde ſubſtituendo, eſt $rfmm = grrt + gmmt.$ vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t.$ ſeu (quoniam eſt $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq} BG = \frac{CKq}{CEq} BG.$

Hæc ſufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.



Geopag 84

Lect. XI.

Reliquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (ſeu è perpendicularibus ad curvas) *Dimenſiones eliciendas pertinentia ſe objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; ſelectiora quædam.

Fig. 122.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea φ Z ψ talis, ut ſi à curvæ puncto liberè ſumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta E A Z ad axem perpenicularis, ſit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *ſpatium* A D ψ φ *æqualis ſemiſſi quadrati* ex recta D H.

Nam ſit angulus H D O ſemirectus ; & æquiſecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C ; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ ; curvæ occurrentes in E, F, G ; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur ; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares ſint ; lineæ verò ſe interſecent ; ut vides. Eſtque triangulum H L G ſimile triangulo P D H (nam ob indefinitam ſectionem curvula G H pro rectâ haberi poteſt) quare HL . LG :: P D . D H . adeóque H L × D H = L G × P D ; hoc eſt H L × H O = D C × D ψ. Simili monſtrabitur diſcurſu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G aſſimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z ; & ſimiliter K I × K Y = B A × B Z ; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z ; unde conſtat triangulum H D O (quod a rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari ſpatio V D ψ φ (quod itidem à rectangulis D C × D ψ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt) ; hoc eſt $\frac{DHq}{2}$ æquari ſpatio V D ψ φ.

Longior diſcurſus apagogicus adhiberi poſſit, at quorſum ?

Fig. 122. II. Iiſdem poſitis, atque paratis; *ſumma rectangulorum* $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex baſe DH.

Nam ob $HL . LG :: PD . DH :: PD \times DH . DHq$; erit $HL \times DHq = LG \times PD \times DH$. hoc eſt $HL \times HOq = DC \times D\psi \times DH$ Similique diſcurſu, $LK \times LYq = CB \times CZ \times CG$. & $KI \times KYq = BA \times BZ \times BF$, *&c.* Verùm $HL \times HOq + LK \times LYq + KI \times KYq$, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propoſitum.

III. Simili ratione conſtabit ſummam $AZ \times AEq + BZ \times BFq + CZ \times CGq$, *&c.* æquari τῷ $\frac{DHqq}{4}$; & eſſe ſummam $AZ \times AE$ cub. $+ BZ \times BE$ cub. $+ CZ \times CG$ cub. *&c.* $= \frac{DH^{5}}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

Fig. 122. IV. Exhinc conſectantur haud aſpernanda *Theoremata*: Sit $VD\psi\varphi$ ſpatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquiſectus; ſi concipiantur ſingula ſpatia $VAZ\varphi$, $VBZ\varphi$, $VCZ\varphi$, *&c.* in ſuas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* reſpectivè ſingulas duci, quæ proveniet ſumma adæquabitur ipſius ſpatii $VD\psi\varphi$ ſemiquadrato.

(a) *Præced.* Lect. X. Nam (uti prius oſtenſum) figuræ $VD\psi\varphi$ adaptari poteſt ſpatium VDH; tale nimirum, ut ducta quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, ſit AP ſibi reſpondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet

(*b*) 1 *hujus.* Fig. 122. ſpatium $VAZ\varphi = \frac{AEq}{2}$; & $VBZ\varphi = \frac{BFq}{2}$; & $VCZ\varphi = \frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia $VAZ\varphi \times AZ + VBZ\varphi \times BZ + VCZ\varphi \times CZ$, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$

(*c*) 3 *hujus.* (*c*) hoc eſt τῷ $\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc eſt τῷ $\frac{VD\psi\varphi \times VD\psi\varphi}{2}$.

V. Quòd ſi ducantur omnia $\surd VAZ\varphi$, $\surd VBZ\varphi$, $\surd VCZ\varphi$, *&c.* in ſuas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* reſpectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipſo ſpatio $VD\psi\varphi$ cubato (τῷ $\frac{2}{3} \surd VD\psi\varphi^{3}$.)

Nam adaptatâ curvâ VH, eſt $\surd VAZ\varphi = AE \surd \frac{1}{2}$; & $\surd VBZ\varphi = BF \surd \frac{1}{2}$, & $VCZ\varphi = \surd CG \surd \frac{1}{2}$, *&c.* Cum itaque ſint omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, *&c.* $= \frac{DH \text{ cub.}}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* $= \frac{DH \text{ cub}}{3} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Eſt autem $DHq = 2\,VD\intercal\varphi$, vel $DH^6 = 8\,VD\intercal\varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* $= \sqrt{\frac{8}{18} VD\intercal\varphi^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{VD\intercal\varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\intercal$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) ſegmenta VAZ, VBZ, VCZ, *&c.* in ſinus rectos AZ, BZ, CZ, *&c.* ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, *&c.* $= \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{8}}$.

Si $VD\intercal$ ſit parabolæ ſegmentum, factum è ſegmentis in applicatas erit $\tfrac{2}{9}\,VDq \times A\intercal q$; ac è radicibus ſegmentorum in applicatas factum erit $\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{8}{27}VD^3 \times D\intercal^3}\ \sqrt{\tfrac{32}{243}VD^3 \times D\intercal^3}$.

Similia plura de factis è *ſegmentorum poteſtatibus*, *aut radicibus aliis in applicatas*, *aut ſinus ductis*, hinc extundi poſſent.

VII. E dictis porrò ſequitur, ſi omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per reſpectiva puncta A, B, C, *&c.* Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, *&c* reſpectivis VP æquentur; erit è ſic applicatis *conſtitutum ſpatium* $AD\xi\theta$ *æquale ſemiſſe quadrati ex ſubtenſa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, *&c.* $= \frac{VDq}{2}$; & omnes $AP + BP + CP$ *&c.* $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, ſi (poſitis iiſdem) ſit curva $RXXS$ talis, ut ſit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *ſolidum factum ex ſpatio*

ſpatio V D↓♀ *circa axem* V D *rotato ſubduplnm ſolidi ex ſpatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti.*

Nam ob H L . L G : : P D . D H : : D↓ . D H : : D↓*q* . D↓ × D H : : D↓*q* . H S × D H ; erit H L × H S × D H = L G × D↓*q* . = D C × D↓*q* . Simili planè diſcurſu erit L K × L X × D L = C B × C Z*q* ; & K I × K X × D K = B A × B Z*q* , &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\varpi}{\delta}$: A Z*q* + B Z*q* + C Z*q*, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{2\,\varpi}{\delta}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva VEH rectæ V D convexas ſuas partes obvertat ; nempe quovis in curva accepto puncto E ; & per hoc ductâ E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factáque A Z = A P ; erit ſpatium V D↓ = $\frac{DHq}{2}$; Sin quoque fiat A Y = V P ; erit ſpatium V D ξ = $\frac{VHq}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant* , ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam V H (cujus axis V D, baſis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ E T, quæ curvam tangat, & recta E I Z ad baſin parallelâ, ſit qerpetuò I Z æqualis ipſi A T ; dico *ſpatium* D H O *ſpatio* V D H *æquari.*

Æquiſecetur enim recta D H indefinitè , punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes* ; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum G L H ſimile triangulo T D H (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus G H rectæ inſtar cenſeri poteſt , eatenus tangenti H T coincidens) quare L G . L H : : T D . D H ; & L G × D H = L H × T D ; ſeu C D × D H = L H × H O . ſimili ratiocinio eſt B C ×

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm ſumma $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à ſpatio VDH minimè differt; & ſumma $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à ſpatio DHO minimè differt. itaque ſpatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctiſſimo Viro *D. Gregorio Aberdonenſi* debetur; cui ſequentia ſubnectimus.

XI. Iiſdem poſitis; ſolidum ex ſpatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit ſolidi facti ex ſpatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam eſt $HL . LG :: (DH . DT :: DH . HO ::) DHq . DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similíque diſcurſu ſunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Eſt autem (ut vulgò notatum habetur) ſumma $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla ſummæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare ſolidum ex ſpatio HDO circa axem DR converſo factum duplum eſt ſolidi, quod è ſpatio VDH circa VD converſo producitur.

XII. Hinc, ſumma $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur ſummæ quadratorum ex applicatis ad VD; ſcilicet ipſis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio conſtabit ſummam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam eſſe ſummæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hòc eſt æqualem ſummæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas poteſtates* obſervabilis eſt Concluſionum tenor.

XIV. Iiſdem poſitis; ſi DXH ſit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, ſit media proportionalis inter ſibi congruas ordinatas IE, IZ; erit ſolidum ex ſpatio VDH circa axem DH rotato duplum ſolidi ex ſpatio DXH circa eundem axem DH converſo procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similíque de cauſa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. *In 10. hujus.* Eſt autem ſumma $VA \times AE \times EI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla ſummæ $VDq + EIq + FKq + GLq$; ergò ſumma $IXq + KXq + LXq + HXq$, ſubdupla eſt ſummæ $VDq - EIq + FKq + GLq$. Vnde liquet Propoſitum.

XV. Quòd ſi curva DXH talis concipiatur, ut ſit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit ſumma cuborum ex IX, KX, LX, &c. ſubtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX ſit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq$, &c. $= \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras poteſtates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima eſt, &c.

Hæc ſimili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζιν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipſi AT; & ordinata BY ipſi BT, &c. æquentur; erit $IZq + KZq + LZq$, &c. (ſumma quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis ſummæ $VA \times AE \times AY + AB \times BF \times BY + BC \times CG \times CY$, &c. (hoc eſt figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, ſumma $IZ.\,cub. + KZ\,cub. + LZ\,cub.$ &c. $= VA \times AE \times AYq + AB \times BE \times BYq + BC \times CG \times CYq$, &c. *hoc eſt figuræ* VDH *in figuræ* VDQ *quadrata ductæ*). Similis & aliarum *poteſtatum* eſt ratio.

Ad ſuperiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera ſunt, & omnino ſimili ratione comprobantur,
Fig. 126. Etiam ſi curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, ſi linea DZO talis ſit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, ſit perpetim $IZ = AT$; erit ſpatium DHO ſpatio VDH æquale; & ſolidum factum ex ſpa- DHO circa axem VR converſo duplum erit ſolidi ex ſpatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, ſit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia ſit linea KZL talis, ut ſumpto in cur-
Fig. 127. va AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL ſecet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; ſit $TF.\,FM ::$

$R.FZ$; erit ſpatium $ADLK$ æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam ſit $DH = R$; & compleatur rectangulum $BDHI$; tum aſſumptâ MN indefinitè parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD; & MEX, NOS ad AD parallelæ. Eſtque $NO.MO :: TF.FM :: R.FZ$. Unde $NO \times FZ = MO \times R$; hoc eſt $FG \times FZ = ES \times EX$. ergò cum omnia rectangula $FG \times FZ$ minimè differant à ſpatio $ADLK$; & omnia totidem rectangula $ES \times EX$ componant rectangulum $DHIB$, ſatìs liquet Propoſitum.

XX. Iiſdem poſitis, ſit curva PYQ talis, ut ſumpta in ſumpta recta MX ordinata EY (reſpectivæ) ipſi FZ æquetur, erit *ſumma quadratorum* ex FZ (ad rectam AD computata) par ei quod fit ex ipſa R in *ſpatium* $DBQB$ ducta.

Eſt enim $FG.ES :: NO.MO :: R \times FZ.FZq :: R \times EY.FZq$. adeóque $FG \times FZq = ES \times R \times EY$.

XXI. Simili ratione *ſumma Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis EY ad BD applicatis. neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis DOK, in qua deſignatum punctum D; & ſubtenſa recta DK; ſit item curva AE talis, ut à D projectâ quâvis rectâ DMF (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductíſque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, ſit $DS.2R :: DMq.DFq$; erit ſpatium ADE æquale ex R, DK.

Nam ſubtenſa DK indefinitè ſecta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus PM, QRN; curvam DOK ſecantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG; ſint verò DT ad DK; & DS ad DM perpendiculares; quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX; & per F arcus FY. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum KPM triangulo KDT ſimile. ac ideò $MP.PK :: TD.DK$. item eſt $DP.PM :: DE.EX$. ſeu, propter aſſignatam cauſam, $DK.MP :: DE.EX$. Eſt itaque $MP \times DK.PK \times MP :: TD \times DE.DK \times EX$. hoc eſt $DK.PK :: TD \times DEq.DK \times EX \times DE$. ac inde $DKq \times EX \times DE = PK \times TD \times DEq$. (a) Eſt autem $DT.2R :: DKq.DEq$; ſeu $DT \times DEq = 2R \times DKq$. ergò eſt $DKq \times EX \times DE = PK \times 2R \times DKq$. quare $EX \times DE = 2R \times PK$; hoc eſt, 2 ſector $DEX = 2R \times PK$. unde ſector $DEX = R \times PK$. Simili planè diſcurſu ſector DFY (a) Hyp.

æquatur ipſi R × RM, vel R × QP. itaque totum ſpatium ADE quod ab ejuſmodi ſectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propoſitum.

Fig. 128. XXIII. Iiſdem, quoad cætera, poſitis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut ſit $DE = \sqrt{DK \times DH}$; & $DF = \sqrt{DM \times DI}$; ac ità perpetuò; erit ſpatium ADE quadrati ex DK ſubquadruplum.

Nam eſt MP . PK :: DK . DH :: DKq . DK × DH :: DKq . DEq. item DP . PM :: DE . EX; hoc eſt DK . PM :: DE . EX. ergò MP × DK . PK × PM :: DKq × DE . DEq × EX. hoc eſt DK . PK :: DKq . DE × EX. vel DKq . DK × PK :: DKq . DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c æquantur ſemiſſi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo ſpatio* EDA; unde manifeſte conſequitur Propoſitum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique ſubtendatur recta DK; ſit item curva DZI talis, ut ſumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; ſumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, ſit PZ = DS; erit *ſpatium* DKI æquale *duplo ſpatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipſi DK perpendicularis ſit, & KT curvam DOK tangat. Eſt itaque (ducto arcu MP) rurſus KP . PM :: KD . DT :: KD . KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem ſecet ſubtenſa DM in R; eſt ergò rurſus MR . RN :: MD . DS; hoc eſt PQ . RN :: MD . PZ. quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia ſimul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc eſt ſpatium DKI duplo ſpatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iiſdem quoad cætera poſitis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipſis MS reſpectivis; & ad rectam aſſumptam X*k*, diſtantiaſque X*k*, X*m*, X*n*, &c, æquales ipſis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ *kd*, *md*, *nd*, &c.

pares ſubtenſis K D, M D, N D ; &c. erit ſpatium X *k d* æquale ſpatio D K I.

Nam eſt K M . K P : : K T . K D ; hoc eſt *k m* . K P : : K I . *k d*. unde *k m* × *k d* = K P × K I. Similíque pacto, M N . M R : : M S . M D . ſeu *m n* . P Q : : P Z . *m d* . unde *m n* × *m d* = P Q × P Z . ac ità deinceps. unde cònſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ *k g*, completóque rectangulo X *k g h*, curva D Z I talis intelligatur, ut ſit M D . M S : : *k g* . P Z ; erit rectangulum X *k g h* æquale ſpatio D K I. Fig. 130.

Nam eſt rurſus K P . K M : : K D . K T : : *k g* . K I. adeóque K P × K I = (K M × *k g* =) *k m* × *k g* . Similitérque P Q × P Z = *m n* × *k g* . ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio D K I cognoſcetur quantitas curvæ D O K.

Hujuſmodi verò complura deprehendet quiſquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam V E H (cujus axis V D, baſis D H) quam tangat utcunque recta E T ; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera ſtatuatur curva G Z Z talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ baſin D H in I, curvam G Z Z in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper D A q . R q : : D T . I Z ; erit D A . A E : : R q ſpat. D I Z G . (vel facto D A . R : : R . D P ; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *ſpatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema* ; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D) ; ſit item linea K Z L proprietate talis, ut ſumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D ſecet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L ſecet in Z) ſit conſtantèr G M . M P : : arc A M . G Z ; erit *ſpatium* A D K L æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum ; etenim hic animus eſt paulò ſubſiſtere.

APPENDICULA.

I. CUm pridem ante plures annos illuſtris Viri, *Chriſtiani Hugenii*, *Cyclometrica* luſtrarem, ac in eo verſatus adverterem ad id negotii duas præſertim ab ipſo methodos adhiberi; quarum una *Circuli ſegmentum* duobus parabolicis (uni inſcripto, alteri adſcripto) medium eſſe monſtrans, illius inde magnitudini limites præſcribit; altera *Parabolici ſegmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis ſegmenti oſtendens, alteros exindè limites, adſignat; incidit mihi cogitatio poſſe loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in ſecunda, paraboliformium aliquam circulari ſegmento circumſcriptibilem uſurpari, ſic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum eſſe re perpensâ comperi; quin & prætereà notavi facilè ſuppares methodos *Hyperbolici ſegmenti dimenſioni* accommodari. Quorum demonſtratio (præ aliis fortaſſe, quæ excogitari poſſent) brevis & clara cùm è ſuprà poſitis conſequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc viſum eſt apponere.

Fig. 133. II. Adſumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonſtrationes è præmonſtratis haud difficilè variis modis colligantur; ſi *paraboliformis* B A E (cujus *Axis* A D, *Baſis* vel ordinata B D E, *Tangens* B T; *Gravitatis centrum* K) exponens ſit $\frac{n}{m}$; erit *Area* B A E $= \frac{m}{n+m}$ A D × B E; & T D $= \frac{m}{n}$ A D, & K D $= \frac{m}{n+2m}$ A D.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ A E B, A F B (quarum communis axis A D, ordinata D B) ità ſe habentes, ut ductâ quâcunque rectâ E F G ad B D parallelâ, quæ lineas expoſitas punctis E, F, G ſecet, poſitóque quòd rectæ E S, F T tangant curvas, (illa curvam A E B, hæc

ipſam A F B) ſit perpetuo T G major quàm S G; *dico nullam curvæ A F B partem* intra ipſam A E B cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars N F M; ità ſcilicet ut curva A F B curvam A E B interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; ſint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipſas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R ſecet punctis X, Y; ſit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium* I H K L $= \frac{HMq - INq}{2} =$ ſpat.IHQR; adeóq; ſpat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX): : SG; GE. —⊐ SG. GF —⊐ TG.GF: : GF. G P (G Y) —⊐ G E. G Y; eſt G X ⊏— G Y; adeòque (cùm hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium I H K L majus ſpatio IHQR; quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata baſis A D E; ſegmenti vero B A E centrum gravitatis ſit punctum H, qer quod ducta ſit recta R S ad B E parallela Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E ſecans, ut ejuſce pars ſuperior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores verò reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit ſegmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin M N. Fig. 135.

Nam è ſegmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P reſiduum B R K A P S E deprimet verſus baſin B E, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magìs deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S *Diametro* C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares ſint rectæ B D, E P; ſit autem A D major quàm A P; erit T D. AD ⊏— S P. A P. Fig. 136.

Nam eſt C T. C A: : C A. C D. Ideoque CT – CA. CA – CD: : CT CA, hoc eſt TA. AD: : CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe S A. AP: : C S. C A. Eſt autem C T. C A ⊏— C S. C A. quare T A. A D ⊏— S A. A P. vel componendo T D. A D ⊏— S P. A P.

VI. *Hyper-*

Fig. 137.

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD : AD $\sqsupset$ SP . AP.

Nam eſt CA . CD :: CT . CA. unde CA − CT . CD − CA :: CT . CA; hoc eſt TA . AD :: CT . CA. ſuppare diſcurſu, eſt SA . AP :: CS . CA. Verùm eſt CT . CA $\sqsupset$ CS . CA. quare TA . AD $\sqsupset$ SA . AP; ſeu componendo TD . AD $\sqsupset$ SP . AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes ſint axis AD, & baſis BD; ſit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & AD $= \frac{m - 2n}{m - n}$ CA (vel $m - n . m - 2n ::$ CA . AD) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138.

Nam quia BT *circulum* tangit, eſt CT . CA :: CA . CD; unde TA . AD :: CA . CD. componendóque TD . AD :: CA + CD . CD. Item, quoniam eſt (ex hypotheſi) CA . AD :: $m - n . m - 2n$; erit per rationis converſionem CA . CD :: $m - n . n$. & componendo CA + CD . CD :: $m . n$. hoc eſt TD . AD :: $m . n$. unde (*a*) palàm fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(*a*) 2 *hujus ap.*

VIII. Subnotetur, quòd inverſè, datâ ratione ipſius AD ad CA deſignabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, ſi AD $= \frac{s}{t}$, erit $\frac{t - s}{2t - s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam poſito fore $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & tranſponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogiſmum redigendo) $m - n . m - 2n :: t . s ::$ CA . AD. itaque conſtat ex antecedente Propoſitum.

IX. Manente quoad cætera ſeptimæ hypotheſi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139.

Nam utcunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ ſecet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Eſtque

RG.AG::(*a*) $m . n$ :: TD.AD (*b*) $\sqsubset$ SG.AG. quare RG $\sqsubset$ SG. unde (*c*) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (*a*) 2. *hujus. app.* (*b*) 5. *hujus ap.* (*c*) 3. *hujus ap.*

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; eſt VP. AP $\sqsupset$ SG. AG $\sqsupset$ RG.AG :: $m . n$; (*a*) itaque rurſus liquet Propoſitum. (*a*) 3. *hujus ap.*

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit) quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (*a*) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt. (*a*) 3. *hujus ap.*

XII. Porrò, *Hyperbolæ* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; ſit autem AD $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam eſt CD.CA :: CA.CT. ac indè AD.TA :: CD.CA; inverſéq; componendo TD.AD :: CA + CD.CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m - n . 2n - m$ :: CA.CD; adeoque inversè componendo CA.CD :: $m - n . n$; & rurſus componendo CA + CD. CD :: $m . n$. hoc eſt TD.AD :: $m . n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſu datâ ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit AD $= \frac{s}{t}$ CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (σωρηδὸν

O

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel tranſponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ C A . A D. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypotheſi, *paraboliformis* A F B intra hyperbolam A E B tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur E F G ad B D parallela; & recta E R *hy-*
(a) 2. hujus ap. *perbolam*, recta F S *paraboliformem* tangant. Eſtque S G . A G :: (a)
(b) 6. hujus ap. $m . n ::$ T D . A D (b) $\sqsupset$ R G . A G. unde R G $\sqsubset$ S G. (c) unde
(c) 3. hujus ap. curva A E B extra curvam A F B tota cadet.

XV. Etiam, ſi reliquis perſtantibus, ad baſin G E, axin A G con-
Fig. 141. ſtitutam imagineris ejuſdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ G E ſuperiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Nam ſi in *curva hyperbolica* A E ſumatur ubicunque punctum M, & ordinetur M P, ducatúrque hyperbolam tangens M V; erit V P . A P $\sqsubset m . n$. adeoque rurſus è tertia liquet Propoſitum.

XVI. Quinetiam ſi hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad baſin E G conſtituta, ad D B protracta concipiatur, ejus ipſis E G, B D in-
Fig. 141. tercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra E G cadit, exinde patet, quòd ipſa cum ipſius tangente recta E S angulum efficit minorem eo, quem eadem recta E S efficit cum recta R E hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam
(a) 3. hujus ap. hoc poſito, (a) ipſa intra *hyperbolam* A N tota conſiſteret, contra quàm mox oſtenſum eſt.

XVII. Habeant *Circulus* A E B, & *Parabola* A F B communem axem A D, & baſin D B; *parabola* ad partes ſupra B D intra *Circulum*; at infra B D extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* A Z, & ei æqualis A H ad B D paralle-
Fig. 142. la, & connectatur Z H; & huic B D producta ad I; ergo D I eſt *Parameter parabolæ* A F B. quòd ſi ſupra B D utcunque ducatur recta E F G K ad B D parallela circulum ſecans in E, parabolam in F, rectas A Z, H Z, in G, & K, patet eſſe G E q = A G × G K $\sqsubset$ A G × D I = G F q. unde G E $\sqsubset$ G F. Item, ſi infra B D utcunque ducatur recta M N O L ad B D parallela *parabolam* ſecans in M, *circulum* in N, rectas A Z, H Z in O, & L, itidem patet eſſe M O q = A O × D I $\sqsubset$ A O × O L = N O q. & ideò M O $\sqsubset$ N O.

$\sqsubset$ N O. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt. Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ A H *Ellipſis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* A E B (cujus axis A Z, parameter A H) & *parabola* A F B axin eundem A D, & baſin D B, *parabola* ſupra D B tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra D B protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ Z H occurrat B D in I; ergò D I eſt *parabolæ parameter*. Quòd ſi ſupra B D utcunque ducatur recta F E G K ad B D parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas A D, Z H punctis G, K, erit F G q = A G × D I $\sqsubset$ A G × G K = E G q. quare F G $\sqsubset$ E G. Quòd ſi infra B D, utcunque ducatur recta M N O L ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas A D, Z H in O, & L, erit N O q = A O × O L $\sqsubset$ A O × D I = M O q. & indè N O $\sqsubset$ M O. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ*. Sit B A E circuli portio, cujus axis A D, baſis B E; ſitque C centrum circuli, & E H ſinus rectus arcus B A E; item, ſit A D = $\frac{s}{t}$ C A; erit Fig. 144.

1. $\frac{2t - s}{3t - 2s}$ A D × B E $\sqsubset$ port. B A E.

2. E H + $\frac{4t - 2s}{3t - 2s}$ B H $\sqsubset$ arc. B A E.

3. $\frac{2}{3}$ A D × B E $\sqsupset$ port. B A E.

4. E H + $\frac{4}{3}$ B H $\sqsupset$ arc. B A E.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimenſionem ſpectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) ſegmentum A D B, habens axin A D = $\frac{s}{t}$ C A; & baſin D B; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t + s}{3t + 2s}$ A D × D B $\sqsupset$ ſegm. A D B. &

2. $\frac{2}{3}$ A D × D B $\sqsubset$ ſegm. A D B.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $A D = \frac{s}{t} C A$, & $H D = \frac{2t - s}{5t - 3s} A D$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éſtque punctum
(a) 2. hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E
(b) 8. hujus ap. conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t - s}{2t - s}$ & (b) quæ proinde circulum AEB tangit; (nam ſi $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t - s}{5t - 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O
(c) 10. hujus ap P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque
(d) 11 hujus ap punctum H ſupra K ſitum eſt.
(e) 4. hujus ap.

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $K D \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbolæ* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $A D = \frac{s}{t} C A$, & $H D = \frac{2t + s}{5t + 3s} A D$; erit H D minor ipsà K D.

(a) 2. hujus. ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ,
(b) 13. hujus ap cujus exponens $\frac{t + s}{2t + s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t + s}{2t + s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t + s}{5t + 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad BE
(c) 15. hujus ap. pertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit;
(d) 16 hujus ap & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H
(e) 4. hujus ap. exiſtit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $K D \sqsupset \frac{2}{5} A D$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima*, *Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* A B Z, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* A D B; & huic adſcripta *paraboliformis* A F B, cujus exponens $\frac{u}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n}CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu A D, ducta conficit *poteſtatem* ordinatæ, ceu D B) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur G E ad D B parallela, & ad G E poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi A F B coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergo *paraboliformis* A F B *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{\underline{m}} \sqsubset GE^{\underline{n}}$; hoc eſt $p^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}} \sqsubset q^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{\underline{2m-2n}} = ZD^{m} \times AD^{\underline{m-2n}}$. & $q^{\underline{2m-2n}} = ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. unde $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}} \sqsubset ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. quare $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^{4} = ZD^{3} \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^{2} = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2}CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^{4}$. vel $p^{7} = ZD^{5} \times AD^{2} = ZD^{3} \times BD^{4}$. & $AD = \frac{4}{7}CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis Z A; & huic inſcripta *paraboliformis* A F B cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n}CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur E G ad B D parallela; & ad E G conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi A F B coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* A F B *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^{\underline{m}} \sqsupset GE^{\underline{n}}$; hoc eſt $p^{\underline{m-n}} \times AG^{n} \sqsupset q^{\underline{m-n}} \times AG^{n}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{\underline{2m-2n}} = \frac{ZD^{\underline{m}}}{AD^{\underline{2n-m}}}$; & $q^{\underline{2m-2n}} = \frac{ZG^{\underline{m}}}{AG^{\underline{2n-m}}}$. unde erit Fig. 149. $\frac{ZD^{\underline{m}}}{AD^{\underline{2n-m}}} \sqsupset \frac{ZG^{\underline{m}}}{AG^{\underline{2n-m}}}$; quare $\frac{ZD^{\underline{m}}}{AD^{\underline{2n-m}}}$ eſt minimum.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD} = \frac{BD^5}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item $AD = CA$.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item $AD = 2\,CA$.

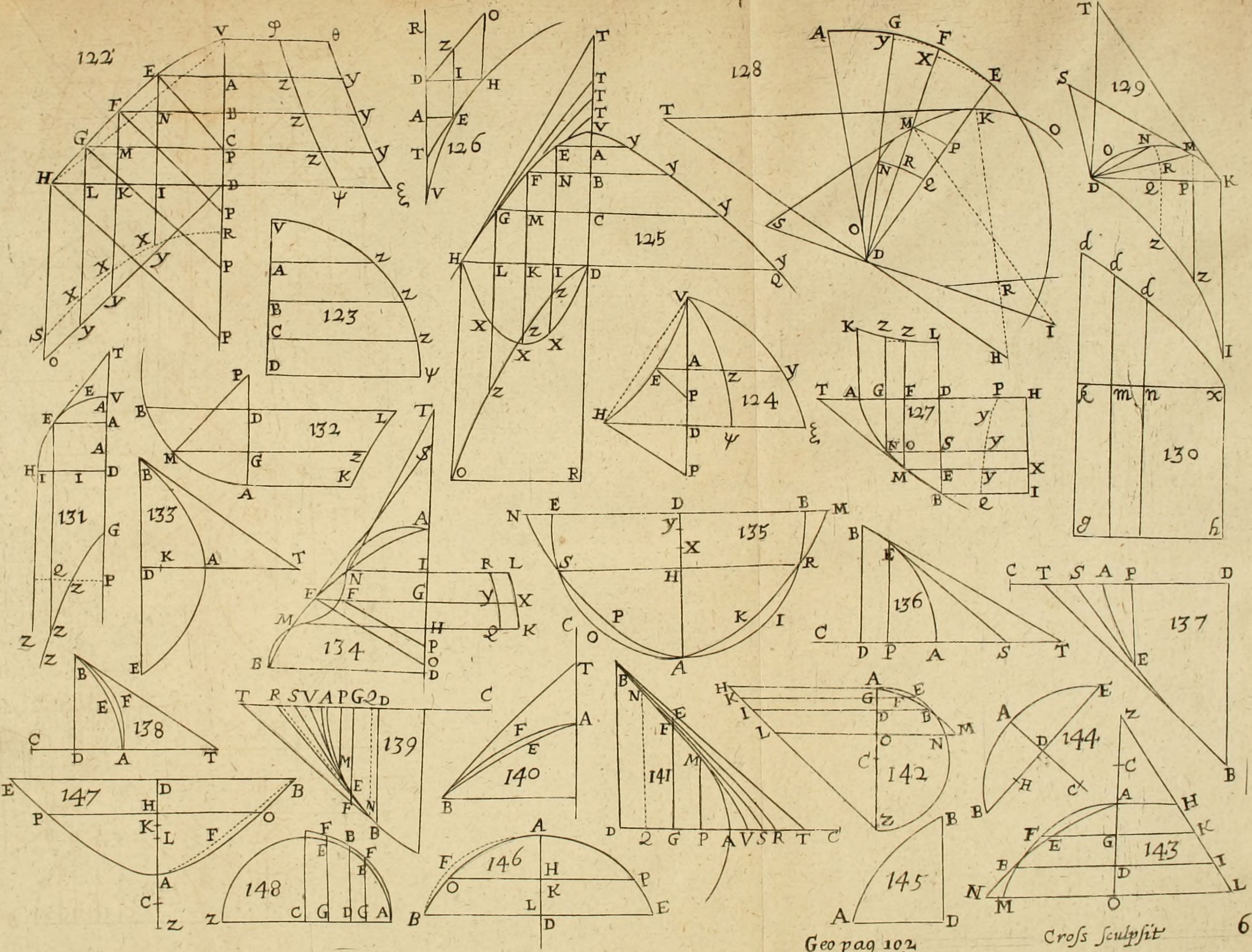
3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^{\underline{6}} = \frac{ZD^8}{AD^2}$. vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{2}{3}\,CA$.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid ſi obiter eò ſpectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula ſubjunxero? præſternatur autem autem hoc καθολικὸν: Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: ſecentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam interſecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Eſtque angulus BMY (ut è ſuperiùs oſtenſis liquet) minor angulo NGS, unde $MB \,.\, BY \sqsubset GN \,.\, NS$. Similíque de cauſa eſt $NM \,.\, MR \sqsubset GN \,.\, NS$.* quare conjunctè eſt $BM + MN + NG \,.\, BY + MR + NS \sqsubset GN \,.\, NS$; hoc eſt arc. $GB \,.\, BH \sqsubset GN \,.\, NS$. rurſus (è diſcurſu conſimili) ratio GN ad NS major eſt ſingulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè eſt $GN \,.\, NS \sqsubset$ arc. $AG \,.\, GE$. quapropter erit $GB \,.\, BH \sqsubset AG \,.\, GE$. permutandòque $GB \,.\, AG \sqsubset BH \,.\, GE$. quare componendo eſt $AB \,.\, AG \sqsubset BD \,.\, GE$.

* Vid. *Append.* Lect. XII.



122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148

Geo pag 102

Croſs ſculpſit

Fig. 151

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* C A, & ad hunc perpendicularis recta D B E; ſit item curva A N E talis, ut ductâ utcunque rectâ P M N ad D E parallelâ (quæ circulum ſecet in M, dictam curvam in N) ſit recta P N æqualis *Arcui* A M; ſit demum *axe* A D, *baſe* D E deſcripta *Parabola* A O E, hæc extra curvam A N E tota cadet.

Nam ſecet recta P N parabolam in O; & connectantur ſubtenſæ A B, A M; eſtque D E . P N :: arc. A B . arc. A M ⊏ A B . A M :: D E . P O . quare P N ⊐ P O; unde liquet Propoſitum.

Fig. 152.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *ſpatiorum* A D B, A D E *dimenſionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA + CD}$ ⊐ arc. A B.

Porrò ſi ponatur arc. A B = 30 grad. ſitque 2 C A = 113; juxta regulam iſtam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* A B, nominatíſque AB = p; CA = r; & D B = e, ad inveniendum *ſinum rectum* D B adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}\,e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

Fig. 153.

XXXI. Sit A M B *Circulus*, cujus Radius C A, & huic perpendicularis recta D B E; ſit item curva A N E pars *Cycloidis* ad *Circulum* A M B pertinentis; demum ad axem A D, baſin D E ſtatuatur *Parabola* A O E; hæc intra *Cycloidem* tota cadet.

Etenim utcunque ducatur recta P M O N ad D E parallela, lineas expoſitas ſecans, ut cernis; connectantúrque *ſubtenſæ* A B, A M; eſtque D E . P O :: A B . A M :: curv. A E . A N ⊏ D E . P N; adeoque P O ⊐ P N. unde conſtat Propoſitum.

XXXII. Exhinc, & è *notis ſegmentorum circularis atque Cycloidalis dimenſionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2\,CD}$ ⊏ arc. A B.

Porrò ſi fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 C A = 113; è regula hac conſectatur fore *totam circumferentiam* minorem quàm 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propoſitis duabus regulis ſtatim emergit *Diametri ad Circumferentiam Proportio Metiana.*

XXXIII. Quoniam exorbitanti ſe obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, neſcio an uſpiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè ſcripſerunt, animadverſum: Completo *Rectangulo* ADEG, *ſpatium*

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro AHG, utcunque perpendicularis ducatur recta DNM: habebit *ſegmentum* AIMD ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam DN.

Nam ſit AR ad AG perpendicularis, ac ipſi AH æqualis; & connectatur HR, cui occurrat recta MD in X; ducatúrque recta GXS; tum ad axem AG *parametrum* AS per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* ALNG; hæc (utì ſatis manifeſtum) intra arcum AKN tota cadet. Eſt autem ſegm. AIMD. ſegm. ALND :: DM. DN. ergo ſegm. AIMD. ſegm. AKND ⊐ DM. DN.

Fig. + 154. XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item recta DC axi majori YZ parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore FT ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit FI ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur FS = FV; & connectatur VS, cui DC producta occurrat in X; & connexa TX ipſi FI occurrat in R. & cum ſit $GDq = FG \times GV = FG \times GX$; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi FT congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad GE parallelâ, ſit RS. RM :: GE. GF; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat EG. FG :: GL. GH; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154.

Corol. Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis GE ad axem GF.

Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm DEC ad ſegm circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

LECT. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbíſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam αϐ curvæ V B, αμ curvæ A M, μν *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam αϐ applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, αφδ tales, ut F Z ipſi M P, & μφ ipſi M F æquentur; erît *ſpatium* αϐδ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) μν × μφ = F G × F Z; ſeu rectang. μθ = rectang. FH; ſpatium verò αϐδ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia μϑ; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iiſdem ſtantibus, ſit curva A Y I talis, ut ordinata F Y ſit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *ſolidum* ex ſpatio $\alpha\delta\beta$
Fig. 156, 157. circa axem $\alpha\beta$ rotato factum æquale *ſolido*, quod à *ſpatio* A D I circa axem A D converſo procreatur.

Nam eſt $MN . NR :: PM . MF :: PM \times MF . MFq :: FZ \times FM . MFq$. unde $MN \times MFq = NR \times FZ \times FM$; hoc eſt $\mu\nu \times \mu\varphi q = NR \times FYq$. Unde liquet Propoſitum.

V. Simili ratione colligetur, ſi F Y ponatur inter F M, F Z *bimedia*,
Fig. 156, 157. fore *ſummam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\beta$, æqualem *ſumma cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam A D. parique modo ſe res habebit quoad cæteras *poteſtates*.

VI. Porrò, ſtantibus reliquis, ſit curva V X O talis, ut E X ipſi MP
Fig. 156. æquetur; & curva $\varpi\xi\psi$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipſi P F; erit ſpatium $\alpha\varpi\psi\beta$ æquale ſpatio D V O B.

Nam eſt $MN . MR :: MP . PF$; adeoque $MN \times PF = MR \times MP$. hoc eſt $\mu\nu \times \mu\xi = ES \times EX$. vel rectang. $ET =$ rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propoſitum.

Fig. 156. VII. Subnotetur hoc: Si curva A B ſit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujuſque *parameter* axi R æquatur (ſcilicet ob $EXq = (PMq = PFq + FMq = \frac{Rq}{4} + FMq = \frac{Rq}{4} + DEq =) DVq + DEq)$. item *ſpatium* $\alpha\beta\psi\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam ſingulæ applicatæ $\mu\xi$ ipſi $\frac{R}{2}$ æquantur. Conſtat itaque dato *ſpatio hyperbolico* DVOB curvam A M B dari; & viciſſim. Hoc obiter.

VIII. Adnotari poſſet etiam omnia ſimul quadrata ex applicatis
Fig. 157. ad rectam $\alpha\beta$ à curva $\varpi\xi\psi$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (ſeu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipſis $PFq \times EX$; ac ita porrò.

Fig. 157. IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) ſi ponatur F Z æqualis ipſi P Q, & $\mu\varphi$ ipſi A Q; *ſpatium* $\alpha\beta\delta$ *ſpatio* A D L K æquari.

Nam ob M N . N R : : P M . M F : : P Q . Q A ; erit M N × Q A = N R × Q A ; hoc eſt rectang. $\mu\theta$ = rectang. F H.

X. Porrò, curvam A B tangat recta M T, ſintque curvæ D X O, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut E X æquetur ipſi M T, & $\mu\varphi$ ipſi M F ; erit ſpatium $\alpha\beta\delta$ æquale *ſpatio* D X O B. Fig. 158.

Nam M N . M R : : M T . M F . quare M N × M F = M R × M T ; hoc eſt $\mu\nu \times \mu\varphi$ = E S × E X ; unde patet. 159.

XI. Hinc rurſus, *ſuperficies ſolidi ex ſpatii* A B D circa axem A D converſione progeniti ad *ſpatium* D X O B ſe habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium* ; hoc igitur noto ſimul illa innoteſcet. unde rurſus *Sphæroidum, Conoidumque ſuperficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea D Y I talis fuerit, ut ſit E Y = $\surd$ E X × M F ; erit *ſolidum* ex *ſpatio* $\alpha\beta\delta$ circa axem $\alpha\beta$ rotato factum æquale *ſolido, quod ex ſpatio* D B I circa axem D B rotato progignitur.

Etenim eſt M N . M R : : M T × M F . M F q : : E X × M F . MFq : : E Y q . M F q . quare M N × M F q = M R × E Y q . hoc eſt $\mu\nu$ Fig. 158.
× $\mu\varphi$q = E S × E Y q. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque poteſtatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *ſummas* cum *ſpatiis* ad rectam D B computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ A Z K, $\alpha\xi\psi$ tales, ut F Z ipſi M T, & $\mu\xi$ ipſi T F æquentur ; *ſpatium* $\alpha\beta\psi$ æquabitur *ſpatio* A D K.

Etenim M N . N R : : M T . T F ; hoc eſt $\mu\nu$. F G : : F Z . $\mu\xi$. Fig. 158.
quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = F G × F Z. 159.

XV. Etiam *ſumma quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *ſummæ Rectangulorum* ex T F, F Z ; & *ſumma Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipſis T F q × F Z (ad rectam ſcilicet A D computationem exigendo) Fig. 158,
parique quoad cæteras poteſtates modò. 159.

XVI. Rurſus ponatur recta Q M P curvæ A M B perpendicularis ; ſitque recta $\beta\delta$ æqualis ipſi B D, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\beta\delta\zeta$; tum curva KZL talis ſit, ut F Z ipſi Q P æquetur ; erit *rectang.* $\alpha\beta\delta\zeta$ Fig. 160,
æquale *ſpatio* A D L K. 161.

Nam eſt M N . N R : : (P M . M F : :) P Q . I F . quare M N × I F = N R × P Q ; hoc eſt $\mu\nu \times \mu\xi$ = F G × F Z . unde patet.

Hinc noto ſpatio A K L D cognoſcetur curvæ A M B quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam T M Y contingere curvam A M B, factâque $\beta\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$, ſit curva O X X talis, ut F X ipſi T Y æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) A D O X X æquale *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$.

Nam $MN . NR :: YT . DA$; hoc eſt $\mu\nu . FG :: FX . \mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva A M B innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\beta\delta = R$; ſi curva O X X talis ſit, ut $MF . MP :: R . FX$; erit *rectangulum* $\alpha\beta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam $MN . NR :: MP . MF :: FX . R$. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ A M B convexa rectam A D ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (θεωρηματικῶς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis A K, D L; rectâ A D; & lineâ quâcunque K L *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ F H ad D L parallelâ (quæ ſecet lineas A D, C E, K L punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z; ſit *quadratum* ex F H æquale *quadratis* ex F G, & Z. quinetiam ſit curva A I B talis, ut ad ipſam productâ rectâ G F I, ſit *rectangulum* ex Z, & F I æquale *ſpatio* A F G C; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* A B æquale *ſpatio* A D L K.

Fig. 163.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta A K ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit K L *recta linea*; erit curva C G E *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea K L *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & A K =

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inverſa, vel infinita (talis ſcilicet ut ſit FH $= \sqrt{\frac{Z^3}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipſi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forſan *Exempla* ipſe circumſpectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etſi præter inſtitutum ſit particularia nunc attingere; qualibus ſanè, hæc generalia conſequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum cenſenti) ſubtexam ad *Circuli Tangentes Secanteſq;* ſpectantia nonnulla, pleraque de ſuprà poſitis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Fig. 167. Eſto *cirtuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C ſumantur A K, C E ſingulæ pares *radio* C A; & *aſymptotis* A C, C Z per K deſcripta ſit *Hyperbola* K Z Z; *aſymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta $\alpha\beta$ æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu\varpi\psi$ rectæ $\alpha\beta$ perpendiculares; quarum $\alpha\gamma =$ A C; $\mu\xi =$ A S; $\mu\psi =$ C S; $\mu\varpi =$ M P.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *ſumma ſecantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *ſpatio hyperbolico* A F Z K.

Eſt enim C F . C A :: (C M . C S ::) C A . C S. adeòque C F × C S = C Aq. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc eſt *Smmma tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *ſpatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujuſce Lectionis 9.

III Curva A X X talis ſit, ut P X ſecanti C S (vel C T) æquetur; *ſpatium* A C P X hoc eſt *Summa ſecantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo ſectori* A C M.

Nam (a) *ſpatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* eſt; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum ſpatium* A C P X totius *ſectoris* A C M duplum eſt. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè conſtat.

IV. Curva C V V talis ſit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *ſpatium* C V P (hoc eſt *ſumma tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* A M. Fig. 166.

Manifeſtè conſectatur ex ſeptima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *ſpatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (ſeu *cylindricum* ad baſin P L O Q, altitudine B C (duplum *ſummæ quadratorum* ex rectis C S, ſeu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc eſt ::) B C + C P. B C — C P. erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item eſt Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) eſt P L + Q O. Q O + Q D. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc eſt P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc eſt ::) 2 B C q. P M q. verùm eſt P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq. PMq. ergò PL + QO. BC :: 2PXq. BCq. vel PL×BC + QO×BC. BCq :: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque B C in omnes PL + Q O ducta adæquat omnia totidem PXq. unde conſtat Propoſitum.

VI. Hinc ſpatium αγψμ (hoc eſt *ſumma ſecantium in arcu* A M ad αβ applicatarum) æquatur *ſubduplo ſpatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam ſumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta μν, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Eſtque M N. M R :: (MC. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. ſeu μν × μψ × C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q ſumma ſpatii P L O Q in C A ducti ſubdupla eſt. Ergò omnia totidem μν × μψ in C A ducta eidem ſubduplo æquantur. quare ſpatium αγψμ (omnibus $\mu\nu \times \mu\psi$ par) æquatur ſubduplo ſpatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant $CA \times CP \times PX$ (hoc eſt *parallelipipedum Baſe Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonſtrationem* (quanquam ϖάρεργον) tranſilio; quoniam aliud *Schema* diſcurſúmque præ reliquis pleríſque longiuſculum expoſcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis ſit, ut FY æquetur ipſi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *ſpatium* ACIYYA (hoc eſt *ſumma Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *ſubduplo ſpatio hyperbolico* PLOQ.

Nam *ſpatium* $\alpha\gamma\varpi\mu$ (*a*) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc eſt *rectangulo* FCIY (nam eſt CA . AS :: CF . FM; vel CA . FY :: CF . CP . adeoq; $CA \times CP = FY \times CF$). item ſpatium $\gamma\varpi\psi$ (hoc eſt omnes rectæ TF ad $\alpha\beta$ applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (*b*) æquatur *ſpatio* AFY; ergo *ſpatium* ACIYA æquatur *ſpatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc eſt (ut mox oſtenſum) *ſemiſſi ſpatii hyperbolici* PLOQ.

(*a*) 1. Lect. XII.
(*b*) 14. Lect. XII.

Aliter illud, (eíque connexa) dimenſus ſum, *hoc præmiſſo Lemmate*.

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; ſit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè ſumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, ſint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Eſtque CH . CE :: CE . CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum eſt *ſegmenti* EDK. item *rectangulum* IKDC *trianguli* CDK duplum eſt; ergo *reliquum ſpatium* CEYI *reliqui ſectoris* ECK duplum eſt. 10. Lect. XI.

Fig. 169. X. Reſumptâ jam quadrante circulari ACB, ſit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, deſcripta ſit *Hyperbola* EKK; poſitóque curvam AYY talem eſſe, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, ſit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam CZ,

C 2 ſecans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur CK ; erit ſpatium ACIYA *ſectoris hyperbolici* ECK duplum.

Nam eſt CIq . CAq :: ASq . CAq :: FMq . CFq :: CAq — CFq . CFq . componendóque , CIq + CAq . CAq :: Fig. 169. CAq . CFq . hoc eſt (ex *hyperbolæ* natura) IKq . CAq :: CAq . CFq . vel IK . CE :: CE . IY . itaque *ſpatium* ACIYA *ſectoris* ECK duplum eſſe perſpicuum eſt è præcedente.

XI. *Coroll.* Hinc ſi *Polo* E, *Chordâ* CB, *Sagittâ* CA deſcripta ſit *Conchois* AVV, cui occurrat YFM producta in V ; erit MV = FY ; adeóque *ſpatium* AMV *ſpatio* AFY æquatur.

XII. Unde *ſpatiorum* ejuſmodi *Conchoidalium dimenſiones* innoteſcunt.

XIII. Neſcio, an *operæ* ſit hoc adjicere *Corollarium*.

XIII. Sit recta AE rectæ RS perpendicularis ; & CE = CA ; ſintque duæ (ſibimet inverſæ) *Conchoides* AZZ, EYY ad eundem *polum* E, *communémque regulam* RS deſcriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta EYZ (lineas interſecans, ut vides) ſit etiam *hyperbole* Fig. 170. *æquilatera*, EKK, cujus *centrum* C, *ſemiaxis* CE ; ducâque IK ad AE parallelâ, connectatur CK, erit *ſpatium quadrilineum* AEOYZPA (rectis AE, YZ, & *conchis* EOY, APZ comprehenſum) æquale *quadruplo ſectori Hyperbolico* ECK.

Nam ſi *centro* E per C ducatur *arcus circularis* CX ; è dictis facilè colligetur *ſpatium* APZIC æquari *duplo ſectori Hyperbolico* ECK unà cum *ſectore circulari* CEX. item *ſpatium* EOYIC æquari *duplo ſectori* ECK, *dempto ſectore* CEX.

Ità quoque facile colligas. Ducantur ZF, YG ad CS parallelæ ; & protrahantur GYL, LIH. ac ob IY = IZ, eſt FZ + GY = 2 CI. & *trapezium* FGYZ = *rectang.* EGLH = 2 CG × CI. ergò patet.

Adnotari poteſt, ſi lubet, ductâ AT ad CS parallelâ, protractâque EZT, ſi ponatur N = 2 triang. CEI — 2 ſect. ECK ; fore ſpat. EZT + EOYE = 2 N.

Nempe N + CXI = ſpat. AZT. & N — CXI = ſpat. EOYE.

XIV. Adjiciemus etiam hiſce cognatam *Ciſſoidalis ſpatii* dimenſionem.

Sit *Semicirculus* AMB (cujus centrum C) quem tangat recta Fig. 171. AH ; eique congruens *Ciſſois* AZZ cujus ſcilicet hæc proprietas eſt, Fig. 171. ut in *circumf.* A M B ſumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z ſecet in Z, ſit M Z = A S) in recta verò $\alpha\beta$ ſumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* A M *ſinubus verſis* A F; erit *ſpatium trilineum* M A Z *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum.*

Nam ſumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Eſtque jam A S . A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F . F M . & 2 C M . 2 M N : : C M . M N : :) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S . 2 M N : : A F . N R; & ideo N R × A S = 2 M N × A F. hoc eſt N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *ſpatium* M A Z *duplo ſpatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

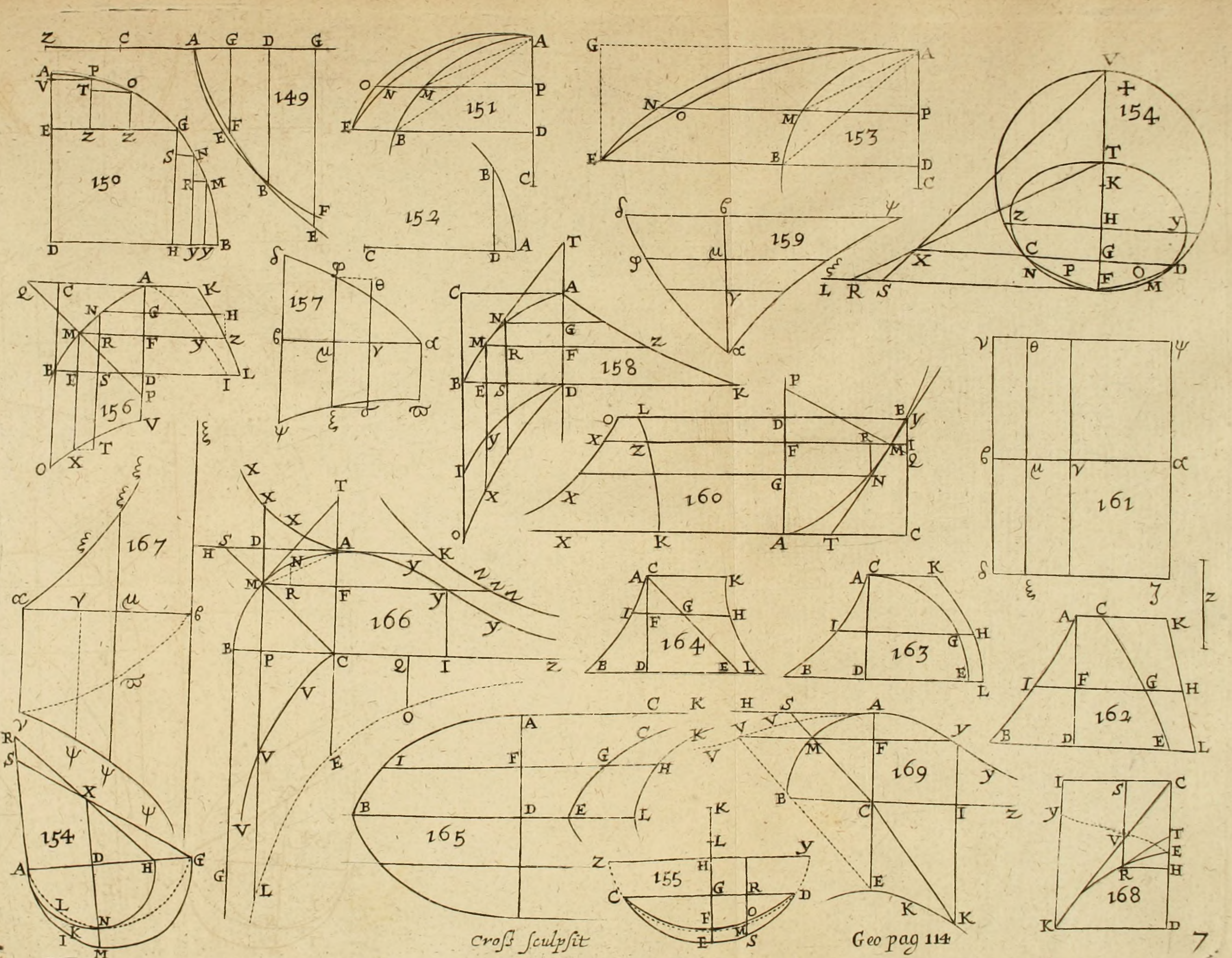
Fig. 172. Hinc cum *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ dimenſio vulgò nota ſit, & è ſuprà poſitis etiam facilè deducatur; habetur *ſpatii ciſſoidalis* M A Z *dimenſio.* calculum ineat qui volet.

Iſta claudet hoc *Conſectariolum* :

Fig. 173. (a) 7, & 12. XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G; ſintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (*a*) ſuperiùs. arcus verò ſumptus A M in partes diviſus concipiatur indefinitè multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *ſumma rectarum* N X (in radiis) æquatur ſpatio $\frac{\text{AFZK}}{\text{Rad.}}$; & *ſumma rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur *ſpatio* $\frac{\text{PLQO}}{3\ \text{Rad.}}$

Nam triangulum X M N triangulo S A C ſimile eſt; & inde X M . M N : : A S . C A . & X N . M N : : C S . C A . unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ità in reliquis; unde liquet Propoſitum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-


149
150
151
152
153
154
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
154
155
169
168
z
Z C A G D G
A P V T O E Z Z G S N R M D H y y B
F E B F E
A O N M P F B D C
B C D A
G A N O M P F B D C
V T K H Z y C G X N P F O D M
L R S
δ ϑ ψ φ μ γ ξ α
Q C A K N G H M R F y Z B E S D I L P V O X T
δ φ θ ϐ μ γ α ψ ξ σ ϖ
C A T N G M R F Z B E S D K y I X O
P B D F G A T C O L X Z K Q M N I y
ν θ ψ ϐ μ γ α δ ξ ʒ
ξ ξ ξ α γ μ ϐ ϖ ν R S ψ ψ ψ X A D H G L N K I M
X X T X S D A K H N M R F y y y B P C Q I Z V V V L E G
A C K I F G H B D E L
A C K I G H B D E L
A C K I F G H B D E L
C K A I F G H B D E L O
H S A V V y M F B C I Z E K K
I S C y V T E H R K D
K L H G R Z y C F O D E M S

Croſs ſculpſit

Geo pag 114

7

APPENDICULA 2.

BRevitati ſimul ac perſpicuitati (huic autem præcipuè) conſulentes præcedentia recto diſcurſu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, ſatis firmatur, at ejuſdem origo limpidiùs apparet. Verùm nè quis, minùs hujuſmodi ratiociniis adſuetus, hæreat, iſta paucula ſubdemus, quibus tales diſcurſus communiantur, quorumque ſubſidio non difficilè conficiantur *Propoſitorum demonſtrationes apagogicæ*.

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, ſingulæ deſignatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (ſimul acceptarum) ad *omnes conſequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam ſint rationes A ad M, B ad N, C ad O ſingulæ æquales rationi R ad S. ergò $X \sqsupset M$; & $Y \sqsupset N$; ac $Z \sqsupset O$. patet igitur fore $A + B + C \,.\, X + Y + Z \sqsubset A + B + C \,.\, M + N + O$. hoc eſt $A + B + C \,.\, X + Y + Z \sqsubset R \,.\, S$.

II. Hinc patet, ſi quotlibet rationes ſingulæ deſignabili quâcunque majores ſint, *antecedentium ſummam ad ſummam conſequentium* etiam deſignabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D ; curvam verò tangat recta B T ; ſitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva ; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam ſecans ad N ; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis deſignabili, puta quàm R ad S.

Nam ſit D E . E T :: R S ; connexaque recta B E curvam ſecet in G, rectam P O in K ; per G vero ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, eſt B P ⊐ B F ; adeóq; P K ⊐ P N (nam ſubtenſa B G intra curvam tota cadit) . ergò P N . N O ⊏ P K . K O :: D E . E T :: R . S .

IV. Hinc, ſi baſis D B in partes ſecetur indefinitè multas ad puncta Z ; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam ſecantes punctis E, F, G ; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q , E R , F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q , R , S , T ; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q , F R , G S , A T (ſimul ſumptas) rationem quâvis aſſignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (ſingulæ ad ſingulas ſibi in directum poſitas reſpectivè) rationem deſignabili quâcunque majorem. ergò ſimul omnes iſtæ ad has ſimul omnes *rationem* habent deſignabili quâvis *majorem* ; hoc eſt recta AD ad EQ + F R + G S + A T ejuſmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T ſimul acceptæ nihilo æquivalent ; ſeu rectæ Z E, Z Q ; & Z F, Y R, &c. æquantur ; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. reſpectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quaſi coincidentes haberi poſſunt. quin & adſumere tutò licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B ; æquiſecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B interſecantes punctis X ; quibus occurrant per ipſa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H ; ſit autem ſegmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenſo) *circumſcripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *ſpatio* quodam S ; dico *ſegmentum* A D B non eſſe minus quàm S.

Nam ſi fieri poteſt ſit A D B minus quàm S exceſſu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R eſt indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus eſſe *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus eſſe *figurâ circumſcriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindéque majus eſt *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergo *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus eſt *figurâ circumſcriptâ*; hoc eſt, *ſpatium* S majus eſt *figurâ circumſcriptâ*, contra *Hypotheſin*. Fig. 176,

VII. Item, ſi ponatur *figura inſcripta* HXGXFXEXZDH minor *ſpatio quodam* S; dico *ſegmentum* ADB non eſſe majus quàm S.

Nam ſi majus eſſe velis, eſto rurſum *exceſſus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (ſicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Eſt autem *ſegmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inſcriptâ. ergò ſegmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inſcriptâ figurâ; hoc eſt *ſpatium* S minus eſt inſcriptâ figurâ, contra *Hypotheſin*.

VIII. Hinc, ſi *ſpatium* quodcunque fuerit,(puta S) cui circumſcripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inſcripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palàm eſt *ſpatium* iſtud S *ſegmento* ADB exæquari.

Nam (utì mox oſtenſum) hoc illo majus eſſe nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumſcriptionis* ac *inſcriptionis modos* accomodari. ſuffecerit innuiſſe.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

Fig. 177.

SIt *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc ſignatum punctum C; ad ipſum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva ſumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; ſit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipſi MG perpendicularis; nam ſi ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam eſſe, adeoque GM eidem recta erit) Porrò ſit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ ſecet ordinatam

dinatam B D in I, & lineam R S in X) ſit MP . ME :: VG . IX; vel, ſit linea A L talis, ut ductâ M P Y ad B D parallelâ (quæ ſecet axem A D in P, & lineam A L in Y) ſit PE . ME :: VG . PY; erit

Fig. 177.

tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) B R S D, vel A D L duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam A M B mota progeneratur.

Nam ſumatur M N indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ N O K T ad ipſam A D, & N Q Z ad B D parallelæ (quæ lineas expoſitas, ut *Schema* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ V M, V N. eſtque MO . MN :: MP . ME :: VG . IX. quare $MN \times VG = MO \times IX = IK \times IX$. Item eſt NO . MN :: PE . ME :: VG . PY. unde $MN \times VG = NO \times PY = QP \times PY$. Eſt autem $MN \times VG$ duplum trianguli M V N. quapropter tam $IK \times IX$, quàm $QP \times PY$ duplum eſt *trianguli* M V N. pariter autem ubique fit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177.

Sit curva A M B *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque $CV = CA = r$. & $CP = x$ (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ M C; patet eſſe $EC = \frac{rr}{x}$; & $MCq = 2xx - rr$ (nam $PMq = xx - rr$) item eſt MCq. CPq :: MEq . MPq; hoc eſt MCq . CPq :: ECq . CGq. hoc eſt $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx} . CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare VG . VA :: (CP . MC) :: MP . ME. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit $IX = VA$, *lineam* R S fore *rectam*; & *rectangulum* B R S D *ſuperficiei conicæ* A M B V *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Jeſſepius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C tranſeat per *coni ſuperficiem*, & quieſcente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut ſemper aliqua pars ejus ſecet *coni ſuperficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in ſuperficie coni ſitas) *ſolidum comprehenſum à ſuperficie vel ſuperficiebus genitis à linea* E C ſic mota & à *portione ſuperficiei* ejuſdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata deſcribit in *ſuperficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* eſt æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *baſis* verò æqualis eidem *ſuperficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C conſtat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum baſes omnes ſimul ſumptæ, exhauriunt *ſuperficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus ſit *Conus rectus* A B C *p* ſecetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & ſuper *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; ſitque E δ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita ſe habet ad A C D *baſem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano baſi C F D (quæ eſt utrique Conico communis) parallelo ergo ſunt æquales. Si ergò à ſolido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit ſolidum E C F D A C quale in propoſitione prima deſcribitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum reciprocæ ſunt baſes altitudinibus*, ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus ſit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum ſecabit *axem coni* in puncto *q* ſupra *verticem* productum & in communi interſectione cum *ſuperficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita ſe habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quieſcente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A *r* generat tres *ſuperficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r, s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *ſuperficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s, t* A *r*. Hoc verò *ſolidum æquale* eſt *pyramidi* cujus *altitudo* eſt æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt ſolidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc ſolidum *q r s t* A *r* poteſt conſiderari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *baſe figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *baſes altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *ſuperficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus ſit *Conus rectus* A B *h g* ſecetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* ſecat *axem coni*, demittatur HK *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita ſe habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo ſuperior.

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapſa; quæ forſan ex uſu ſit adjicere. *Demonſtrationes* elicere poterit quiſpiam è præmiſſis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc ſignatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut ſi ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG ſecet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; ſit TM ipſi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD ſumptum, protendatur recta RZ ad ipſam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP ſumatur $PY = RS$; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum ſit rectangulum ex AR, & PM æquale ſpatio $AYYP$ (ſeu $PM = \frac{\text{ſpat. } AYYP}{AR}$) habebit curva $LMMB$ conditionem propoſitam.

Adnotari poteſt, ſi ſtantibus reliquis, ſit curva QXX talis, ut cum hanc ſecet recta EP in X, ſit $PX = AS$; erit ſpatium $AXXP$ æquale rectangulo ex AR, & curva LM, ſeu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; deſignetur curva AMB talis, ut ſi producta recta EPM hanc ſecet in M, ipſamque tangat recta MT, ſit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis ſit, ut ſi hanc ſecet producta PE in Y, ſit $PY = AS$; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. } AYP}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd ſi curva QXX talis ſit, ut $PX = DS$ (vel ſi $AQ = AD$, & QXX ſit *hyperbola* angulo ADG comprehenſa) erit curva $AM \times AD =$ ſpat. $AQXP$.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut ſi à quocunque puncto in ipſa ſumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, ſit A E inter deſignatam A R, & A P proportione media, ſecundum ordinem, cujus exponens ſit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n \,.\, m$: : A E . arc. A M.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E ſit inter A R, A P ſimpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimenſio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehenſivo peraguntur.

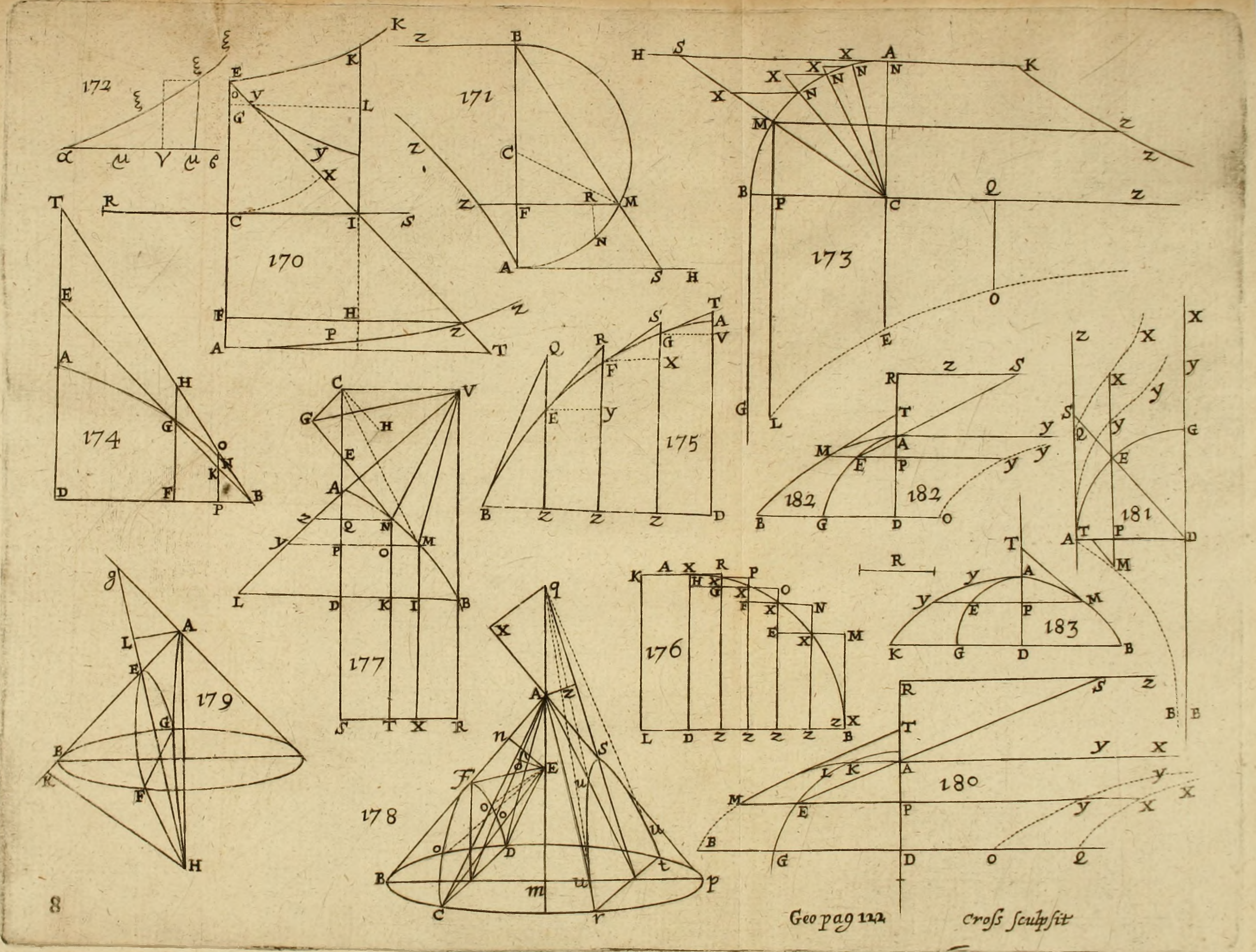
Probl. II.

Fig. 183. Curva deſignetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac ſumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & poſito rectam M T ipſam tangere, habeant T P, P M relationem aſſignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem aſſignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe ſumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) ſic ut per ejuſmodi puncta Y, tranſeat curva Y Y K; tum ſi fiat P M $= \frac{\text{ſpat. } APY}{R}$; de curvæ A M B indè conſtabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur deſignatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum ſit, juxta præſcriptum, R. arc. A E : : R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur P M $= \frac{APY}{R}$.


172
170
171
173
174
175
182
182
181
177
176
183
179
178
180

8

Geo pag 122

Croſs ſculpſit

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE, & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R : : R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R : : R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium LEXH æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* LEXH; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. ADLK = R × D L — DO. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\ \text{cub.} - DO\ \text{cub.}}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque $\varphi\psi$ ad A D, & $\varphi\xi$ ad D L perpendiculares, fore $\varphi\psi = \frac{DL + DO}{4}$, & $\varphi\xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *aſymptotis* D B, D H per F deſcripta ſit *hyperbola* F X G; item centro D deſcriptus ſit circulus K Z L; ſit denuò curva A M B talis, ut in hac ſumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item ſumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, ſit *ſpatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari ſectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; ſitque D B × B F = R q; fiátque D K . R :: R . P; tum D K . P :: D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc eſſe proprietatatem; ut D I ſit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (ſeu nihilum) & arcum K L eſt medius *Arithmeticè*. hoc eſt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L ſint Logarithmi ipſarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipſius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometrica* exorſa à D O, & deſinente in D B ac *o* ſit *Logarithmus* ipſius D O, & arcus L K ipſius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipſius D I.

Quod ſi abſolutè conſtruatur curva A M B, ejúſque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hpperbolici ſpatii Cycliſmum* dari, vel *Circuli hyperboliſmum*.

Hujuſce *Spiralis* naturam, ac dimenſionem (ut & Spatii B D A dimenſionem) luculentè proſecutus eſt præclariſſimus D. *Walliſſius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Fig. 188. Sit ſpatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehenſa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut ſi utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis ſit, & M T curvam A M B contingat; ſit D T . D M :: R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = √ R × D N; ſumptâque liberè rectâ D B, ſit D B . R : : R . B F (ſit autem B F, ut & D H ipſi D B perpendicularis) tum per F, angulo B D H incluſa, tranſeat *hyperbola* F X X; ſitque ſpatium B F X I (poſitâ nempe I X ad B F *parallelâ*) æquale duplo ſpatio Z D L; ſit denuò D M = D G; erit M in curva quæſita; quam utique ſi tangat recta T M, erit T D . D M : : R . D N.

Probl. VI.

Sit rurſus ſpatium E D G (ut in præcedente) reperienda eſt curva A M B, ad quam ſi projiciatur recta D N M, & ſit D T huic perpendicularis, & M T curvam A M B tangat, fuerit D T = D N. Fig. 188.

Adſumatur quæpiam R, & ſit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ D B (cui perpendiculares D H, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *aſymptotos* D B, D H deſcribatur *hyperboliformis* ſecundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu B F, vel I X, ſint quartæ proportionales in ratione D B ad R, vel D G ad R) tum capiatur ſpatium B I X F æquale duplo ZDL; & ſit D M = D I; erit M in curva quæſita; quam ſi tangat M T, erit D T = D N.

Probl. VII

Sit figura quævis A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) & utcunque ductâ P M ad DB parallelâ datum ſit (ſeu expreſſum quomodocunque) ſpatium A P M, oportet hinc ordinatam P M exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, ſit R × P Z = A P M; hinc emergat linea A Z Z K; huic perpendicularis reperiatur Z O; tum erit P Z . P O : : R . P M.

Exemp. A P vocetur x & ſit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Eſtque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} :: r . \frac{3}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde A M B eſt *Parabola*, cujus *Parameter* eſt $\frac{9}{4}r$.

Aliter. Fiat $PZ = \surd 2APM$. & ſit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \surd \frac{2x^3}{r}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rurſus AMB erit *Parabola.*

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehenſa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum ſit ſpatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, ſit $DZ = \frac{2ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \surd R \times DO$.

Aliter. Sit $DZ = \surd 4ADM$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \surd DZ \times DO$.

De figuris involutis & evolutis bellam σκέψιν inſtituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Aberd.* Alienæ meſſi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque iſthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi ſe ingeſſerunt) unam aut alteram obſervatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data ſit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL deſcribatur *Circulus* LXX; ſit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, ſit rectangulum ex P M, P Z æquale quadrato ex C L (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{ſpat. } DKZP}{CL}$ (vel ſector L C X ſubduplus ſpatii D K Z P) & in C X capiatur $C\mu = PM$; erit linea ϐ μ μ ipſius B M A involuta; vel ſpatium C μ ϐ ſpatii A D B.)

Exemp. Sit A D B circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonſtratis conſtat) ſpat. D K Z P (2 ſector L C X). ſect. B D M : : C L q. D B q. unde arc. L X. arc. B M : : C L. D B. quare ang. L C X = ang. B D M = ang. D M P. unde ang. C μ ϐ eſt rectus, adeóque linea ϐ μ C eſt *ſemicirculus.*

Coroll. 1. Subnotari poteſt, ſi duæ figuræ A D B, A D G analogæ fuerint; & harum *involuta* ſint C μ ϐ, C ν γ; & fuerit C μ. C ν : : D B. D G; erit reciprocè ang. ϐ C μ. ϐ C ν : : D G. D B. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ C ν γ, C S ϐ ſuo modo analogæ fuerint, hoc eſt, ſi utcunque à C projectâ rectâ C ν S, habeant C ν, C S eandem perpetuò rationem, erunt hæ ſimilium linearum *involuta.* Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam ϐ C φ rectis C ϐ, C φ, & aliâ lineâ ϐ φ comprehensâ, ei competentem *evolutam* deſignare. Fig. 195.

Centro C utcunque deſcribatur *circularis arcus* L E (cum rectis C ϐ, C φ conſtituens ſectorem L C E) tum ductâ C K ad L C perpendiculari, ſit curva ϐ Y H ita rectam C K reſpiciens, ut liberè projectâ rectâ C μ Z, ſumptâque C O = arc L Z, ductâque O Y ad C K perpendiculari, ſit O Y = C μ; porrò ad rectam D A ſic referatur curva B M F, ut cùm ſit $DP = \frac{\text{ſpat. } C\text{ϐ}YO}{CL}$; & P M ad D A perpendicularis; ſit etiam PM = C μ; erit ſpatium DBFA ipſins C ϐ φ *evolutum.* Fig. 196.

Exemp. Sit L Z E arcus circuli centro C deſcripti, & ϐ μ C ejuſmodi Fig. 197.

ſpiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem aſſignatam (puta R ad S) Manifeſtum eſt lineam ϐ Y H eſſe rectam, quoniam E Z (K O) . C μ (O Y) :: R . S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D ſe habent ut ſpatia K O Y, K C ϐ, hoc eſt ut quadrata ex ipſis OY, Cϐ, vel ex ipſis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram ϐ C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iſte *cylindricus* æqualis *ſolido*, quod procreatur è figurâ C ϐ H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) & curva A Z L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, ſit $PZ = \sqrt{2\,APM}$; ſit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adſumptâque rectâ R, ſit Z P q . R q :: P M . P Y; ſitque denuò D L . R :: R . L E . & per E intra angulum L D G deſcribatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit ſpatium P D O Y æquale *ſpatio Hyperbolico* L H X E.
Fig. 199.

Hinc *ſumma* omnium $\dfrac{PM}{APM} = \dfrac{2\,LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, baſis D B; & curva K Z L talis, ut adſumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, ſit $\sqrt{APM} . PM :: R . PZ$; erit ſpatium ADLK
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in $2\sqrt{ADB}$; vel $\dfrac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit ſumma omnium $\dfrac{PM}{APM} = \sqrt{2\,DA \times \text{arc. } AB}$.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, baſis D B) ſintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B ſumpto quopiam am puncto M, ductíſque rectis M P X ad B D, & M Q Y ad A D parallelis, poſitóque rectam M T tangere curvam A M B, ſit T P . P M :: Q Y . P X; erunt figuræ A D K E, D B L G ſibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc converſum. Nempe ſi figuræ A D K E, D B L G æquentur, & M T curvam A M B tangat, erit T P . P M :: Q Y . P X:

Not. Omnium hactenus Propoſitorum fœcundiſſimum eſt hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè conſectantur. Nam poſito lineam A M B indeterminatam eſſe naturâ, ſi ipſarum E X K, G Y L alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde reſultabit Theorema quoddam ejuſmodi, qualia ſuperiùs exhibentur aliquammulta. Si *e g.* linea G Y L ponatur recta cum ipſa B D ſemi-rectum conſtituens angulum (quo caſu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si G Y L ſit recta ad D B parallela, emerget *Lectionis ejuſdem.* Rurſus ſi $PM = PX$ (vel lineæ A M B, E X K ſint eædem) conſequetur hinc *decima* ejuſdem. Exhinc porrò liquet adſumpto cuilibet ſpatio *infinita, genere diverſa, ſpatia æqualia* facilè deſignari veluti ſi *ſpatium* D G L B ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva A M B ſit *parabola*, cujus *axis* A D, emerget curvæ E X K hæc proprietas, ut (ſi dicatur $DB = r$; $AP = x$; $PX = y$; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) ſit *parabolæ ſemiparameter*) ſit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin A M B ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva E X K. his autem expenſis ἀβλεψίαν meam incuſo, qui non hoc *Theorema* (ſicut & ea quæ ſubſequuntur, quorum ferè ratio conſimilis eſt, & ſuppar uſus) primo loco poſuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox ſubjiciendis) quod fieri poſſe video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujuſmodi *Phrygiam ſapientiam* juxta mecum pleriſque familiarem autumo, literas has tractantibus. Fig. 202.

Theor. V.

Sit ſpatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curva A M B comprehenſum) ſint item curvæ E X K, G Y L ità relatæ, ut ſi in curva A M B liberè ſumatur punctum M, ducatur D M X, ſit $DQ = DM$, ducatur Q Y ad D B perdendicularis, ſit D T ad D M perpendicularis, recta M T curvam A M B contingat; ſi, his inquam ſuppoſitis, ſit T D . D M :: D M × Q Y . D X q; erit ſpatium D G L B ſpatii E D K duplum. Fig. 203.

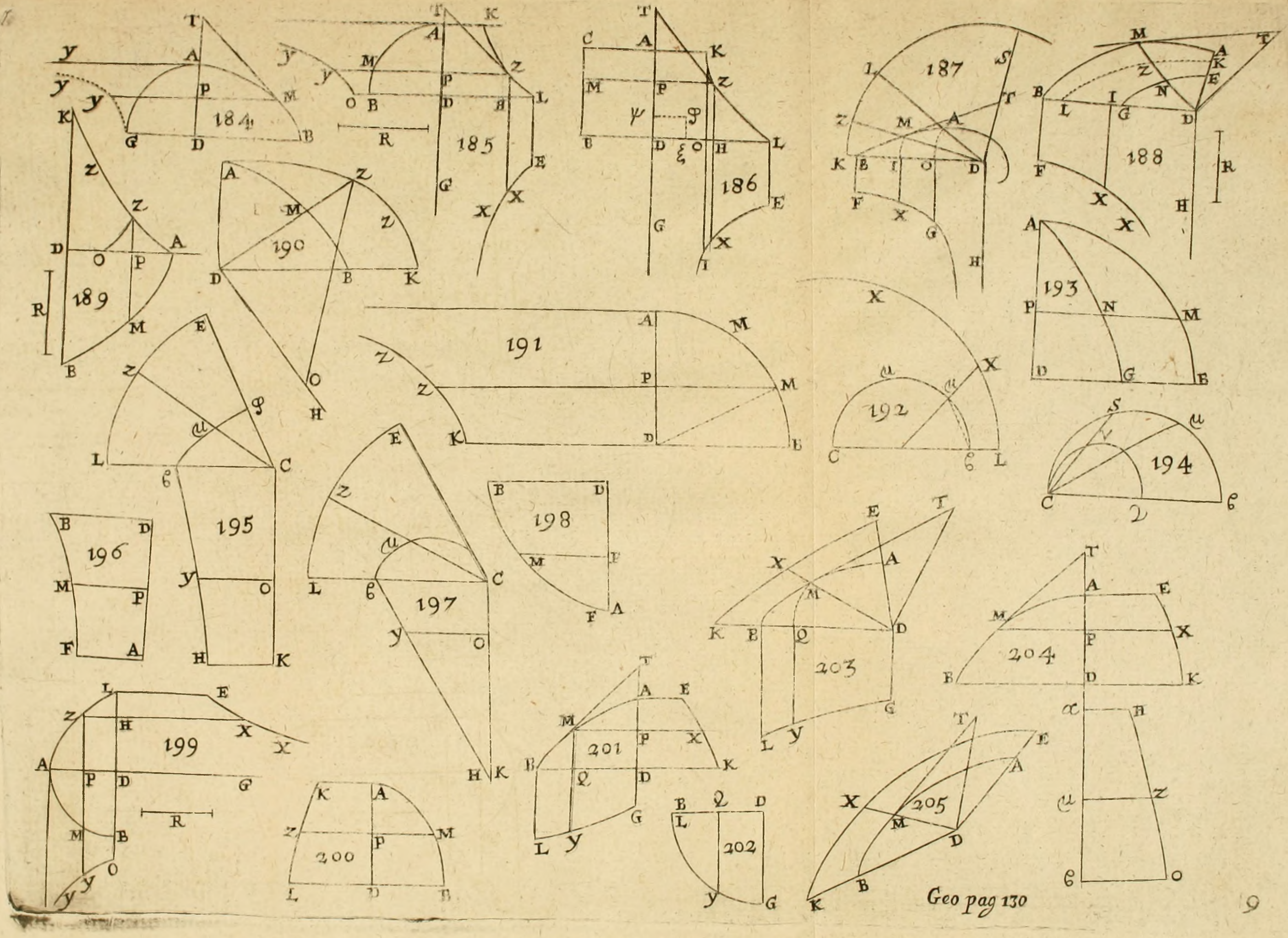
Theor. VI.

Fig. 204. Sit rurſus AMB curva quævis (cujus axis AD, baſis DB) & curvæ EXK, HZO ita verſus ſe, & axes AD, $\alpha\beta$ relatæ, ut arbitrariè in curva AMB accepto puncto M, & ductâ MPX ad AD perpendiculari, ſumptâ $\alpha\mu =$ arc AM, ductâ μZ ad $\alpha\beta$ perpendiculari, poſitóque rectam TM curvam AMB tangere; ſit $TP . TM :: \mu Z . PX$; erunt ſpatia ADKE, $\alpha\beta OH$ æqualia ſibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit ſpatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curvâ AMB definitum) ſint item curvæ EXK, HZO ità relatæ, ut ſi quodvis capiatur punctum M in curva AMB, projiciatur recta DMX, ſumatur $\alpha\mu =$ arc AM; ducatur μZ ad rectam $\alpha\beta$ perpendicularis; ſit DT perpendicularis ipſi DM recta MT curvam AMB tangat; ſit $TD . TM :: DM \times \mu Z . DXq$; erit ſpatium $\alpha\beta OH$ ſpatii EDK duplum.

Sed horum hic eſto terminus.


184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
R
T
A
P
D
G
B
M
K
Z
X
E
L
H
O
y
C
F
I
N
S
Q
ψ
φ
ξ
α
ϐ

Geo pag 130

Lect. XIII.

ÆQuationum naturam è terminorum *analogia* expoſuit *Vieta*; illam ex eorum in ſe ductu dilucidiùs explicuit *Carteſius*. Eam ego jam è linearum ſingulis appropriatarum deſcriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui ſanè modus rem præſertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In ſequentibus perpetim ad eaſdem ſeries redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent eaſdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Fig. 206.

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc verſus H indefinitè protendatur; ſint anguli R A H, S B H ſemirecti, ſintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine ſecet punctis L, M, N; rectaſque B S, A R punctis K, Z) ſit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Nam ſi A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G Lq $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N$qq = a^4 + ba^3$.

* Vid. *pag.* 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, ſi in hac capiatur A E $= n$; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expoſitis interſe- Fig. 206. ctiones æquationum propoſitarum radices exhibebunt reſpectivè; erit utique E K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipſi a; hoc eſt ipſis A G, concipiendo à ſingula interſectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem poteſt G A deſumi quavis deſignatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magìs increſcunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occurſura ſit; & proinde ſemper habetur vera radix iſtarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas iſtas unico puncto interſecat.

3. *Curva* A L L eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N ſunt *hiperboliformes*.

4. Si A O ſit $\frac{1}{2}$ A B; & A P $= \frac{1}{3}$ A B, & A Q $= \frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum ALL, AMM, ANN *aſymptoti*.

5. Hinc conſtat in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, ſi A E benemagna ſit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus iſtis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series ſecunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \&c.$$

Fig. 207. Sit rurſus A B $= b$; & indefinitè protrahatur A B verſus I, & ſint anguli R A I, S B I ſemirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut ſi utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas ſecans, utì cernis, punctis K, L, M, N, Z) ſit inter

G Z, G K media G L, bimedia G M, trimedia G N; propoſitas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam ſi A G (vel G Z) vocetur a; erit B G (vel G K) $= a - b$; & G L q $= aa - ba$; & G M cub. $= a^3 - baa$; & G N $qq = a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ A D ad A I perpendiculari, & E F ad A I parallelâ, ſi A E ponatur æqualis ipſi n; erunt E K, E L, E M, E N radices æquationum reſpectivæ, ſeu æquales quæſitis a.

2. Quoniam ordinatæ G K, G L, G M, G N à termino B verſus I infinitè excreſcunt, ſemper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva B L L eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ curvæ ſunt *hyperboliformes*.

4. Si A B biſecetur in O, triſecetur in P, quadriſecetur in Q, ducantúrque ad A R parallelæ O T, P V, Q X, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *aſymptoti*.

5. Hinc ſequitur in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd ſi n ſatis magna ſit, iſtæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; ſcilicet ipſa A B, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$

$ba - aa = nn.$

$baa - a^3 = n^3.$

$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Fig. 280.

Sit A B $= b$, & anguli R A B, S B A ſemirecti; tum curvæ A L B, A M B, A N B tales, ut ductâ rectâ G K ad A B utcunque perpendiculari (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit inter A G (ſeu G Z) & G K *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; propoſitas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam poſito fore A G $= a$, erit G K $= b - a$; & G L q $= ba - aa$; & G M q $=$ $baa - a^3$. & G N q $= ba^3 - a^4$.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E = *n*; & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices *a* reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel *n*) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeoque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel *b*.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1. 2. 3.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=n \\ a+b=\frac{nn}{a} \\ a+b=\frac{n^3}{aa} \\ a+b=\frac{n^4}{a^3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a-b=n. \\ a-b=\frac{nn}{a} \\ a-b=\frac{n^3}{aa} \\ a-b=\frac{n^4}{a^3} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} b-a=n. \\ b-a=\frac{nn}{a} \\ b-a=\frac{n^3}{aa} \\ b-a=\frac{n^4}{a^3} \end{array}\right\}$$

Aliter (& forte commodiùs; pro ſingulo trium ſerierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur iſtæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Fig. 209, 210. Sit A H recta indefinitè protenſa, & huic perpendicularis A D; in qua ſumatur A B = n, & ducatur B K ad A H parallela, tum ſint lineæ L X L, M X M, N X N tales, ut ſumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, ſit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient.

Nam ſumpta A E = b (ſumatur autem A E ob primam ſeriem ad partes I, ob ſecundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H ſemirectus (iſte quidem pro prima & ſecunda ſerie inclinans verſus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema ſatis monſtrat) tum rectæ E F cum expoſitis lineis interſectiones reſpectivæ radices a determinabunt; nempe ſi per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus a æquales reſpectivè.

Not.

Exhinc conſtat, quòd

1. In hac explicatione *coëfficiens* b indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipſa n.
2. In prima & ſecunda ſerie ſemper una poſitiva radix habetur, & unica.
3. In ſecunda ſerie minima radix ipſi A B, vel n æquatur.
4. Communis omnium linearum *nodus* eſt *punctum* X, ubi B X (vel a) = n.
5. In tertia ſerie ſubindè duæ habentur radices poſitivæ (quando ſcilicet E F curvas bis ſecat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipſarum aliquam contingat; id quod accidit in ſecundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3} b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4} b$) aliquando nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nuſquam curvis occurrit.
6. Secundi gradûs curva eſt *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *aſymptoti* ſunt rectæ A H, A D.

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + cc = nn.$$

$$a^3 + cca = n^3.$$

$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protenſa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH ſemirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG . AC :: AC . ZK; per K intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* KXK; ſint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK ſint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito deſervient. Nam ſi AG (vel GZ) dicatur a, erit GK $= a + \frac{cc}{a}$; & GLq $= aa + cc$; & GM cub $= a^3 + cca$; & GNqq $= a^4 + ccaa$. Fig. 211.

Not.

1. Deſignantur radices, ut in præcedentibus, poſitâ AE $= n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde ſi AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *ſemiaxis* AC; quæ & ordinatarum eſt *minima*; alioquin ſi $n \sqsubset c$, ſemper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN ſunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde ſemper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{2}YX$; $Y\beta = \frac{1}{3}YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4}YX$, & per puncta α, β, γ, traductæ concipiantur *hpperbolæ* (habentes & ipſæ *aſymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipſarum curvarum CLL, AMM, ANN *aſymptoti*. (Similes etiam *aſymptoti* conveniunt lineis poſthac deſcribendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in ſecundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò A E (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas L X L, M X M, N X N; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,\text{cub.}}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus H A R ſemirectus, & utcunque ducatur G E O ad A H perpendicularis; & ſit G E . c :: c . E O; & per O intra aſymptotos A D, A R deſcribatur *hyperbola* O O; hujuſce cum expoſitis lineis L X L, M X M, N X N interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique L G, M G, N G ad A H perpendicularibus; erunt interceptæ A G ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

Series ſexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - csaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus R A I ſemirectus, & A D ad A I perpendicularis; in qua A C = *c*; tum utcunque ductâ G Z ad A D parallelâ, ſit A G (vel G Z). A C :: A C. Z K, & per K, intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* K Y K; tum ſint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K ſit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ propoſito deſervient.

Conſtat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices reſpectivè determinantur. Verum adnotetur præterea.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad quintam ſeriem pertinent; reliquæ H L λ, H M μ, H N ν ad ſextam.

2. Quoad curvas ad quintam ſeriem pertinentes; ſi A $\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φ Y; erit Y communis linearum interſectio, ſeu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata A K eſt infinita, in ſecundo A C eſt maxima; in tertio ſi fuerit A P = $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una ſemper major eſt quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto ſi AQ = $\sqrt{\frac{ACq}{4}} - \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipſâ $\frac{AC}{2}$).

4. Conſequentèr in harum ſecundo gradu ſi $n \sqsubset c$; in tertio, ſi $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto ſi $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in iſtis caſibus recta E F curvas ſupergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima poſſibilis radix eſt $AH = AC$.

6. Curva C Y H eſt *Circuli quadrans*, reliquæ A M H, A N H quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad ſextam ſeriem pertinentium curva H L L eſt *hyperbola æquilatera*, cujus axis A H; reliquæ ſunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc ſeriem liquent cætera.

Series ſeptima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta B A H indefinitè protensâ capiatur $AB = b$; & in A D ad B H perpendiculari ſit $AC = c$; ſint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ G Y ad A H perpendiculari quæ ipſam B S ſecet in Y; fiat A G . A C :: A C . Y K; & per K intra angulum D V S deſcribatur *hyperbola* K K K; ſint demum curvæ C L L, AMM, A N N tales, ut inter A G (vel G Z) & G K ſit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ ſatisfacient negotio. Nam eſt $GK = a + b + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + ba + cc$; & GM cub $= a^3 + baa + cca$; & GN qq $= a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva C L L eſt pars *hyperbolæ æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipſam A B biſecans; & ſiquidem $AC \sqsubset AO$, eſt O H (ad A B perpendicularis, &) $= \sqrt{ACq - AOq}$ ejus *ſemiaxis*; ſin $AC \sqsupset AO$, ejus axis eſt $OI = \sqrt{AOq - ACq}$. reliquæ verò curvæ A M M, A N N ſunt *hyperboliformes*.

2. Hinc conſtat in ſecundo gradu ſi fuerit $n \sqsupset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una ſemper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas ſemel interſecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4. \&c.$$

Fig. 215. In recta A I ſumatur A B $= b$; & in A D ad ipſam A I perpendiculari ſit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S ſemirecti, ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipſam B S ſecans ad ξ; & ſit A G . A C : : A C . ξ K; tum per K intra angulum D S B deſcribatur *hyperbola* KYHK; ſint denuo curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G, G K ſint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ propoſito ſatisfacient; conſtat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam ſeriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam ſeriem, ſi biſecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H eſt O T maxima; ſin fiat A P $= \frac{b}{3} + \surd\frac{bb}{9} +$

cc

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item ſi A Q $= \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam ANH erit Q X maxima.

3. Hinc, ſi in ſecundo harum gradu ſit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio ſi (poſito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) ſit $n^3 \sqsubset cef + bff - f^3$; in quarto, ſi (poſito fore $g = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) ſit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his ſupp ſitis, recta E F curvis non occurret, reſpectivè.

4. Si fuerit A $\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde ſi $n = A\varphi$; erit Aφ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H eſt *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H ſunt *Cycliformes*.

6. Peculiare eſt in ſecundo gradu, quòd ſi $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima eſt in nona ſerie) eſt $AH = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *ſemiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν ſunt *hyperboliformes*; unde patet in ſerie nona ſemper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$$a + b - \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + ba - cc = nn.$$

$$a^3 + baa - cca = n^3.$$

$$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta B A H ſumatur B A = b; & in A D ad A H perpendiculari ſit A C = c; ſintque anguli H A R, H B S ſemirecti; tum utcunque ductâ rectâ G K ξ ad A H perpendiculari (quæ ipſam B S ſecet in ξ; ſit A G. A C :: A C. ξ K; & per K intra *aſymptotos* V D, V S deſcribatur *hyperbola* KYHK; ſint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K ſint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ propoſito ſervient, id quod conſtat, ut in præcedentibus.

Not.

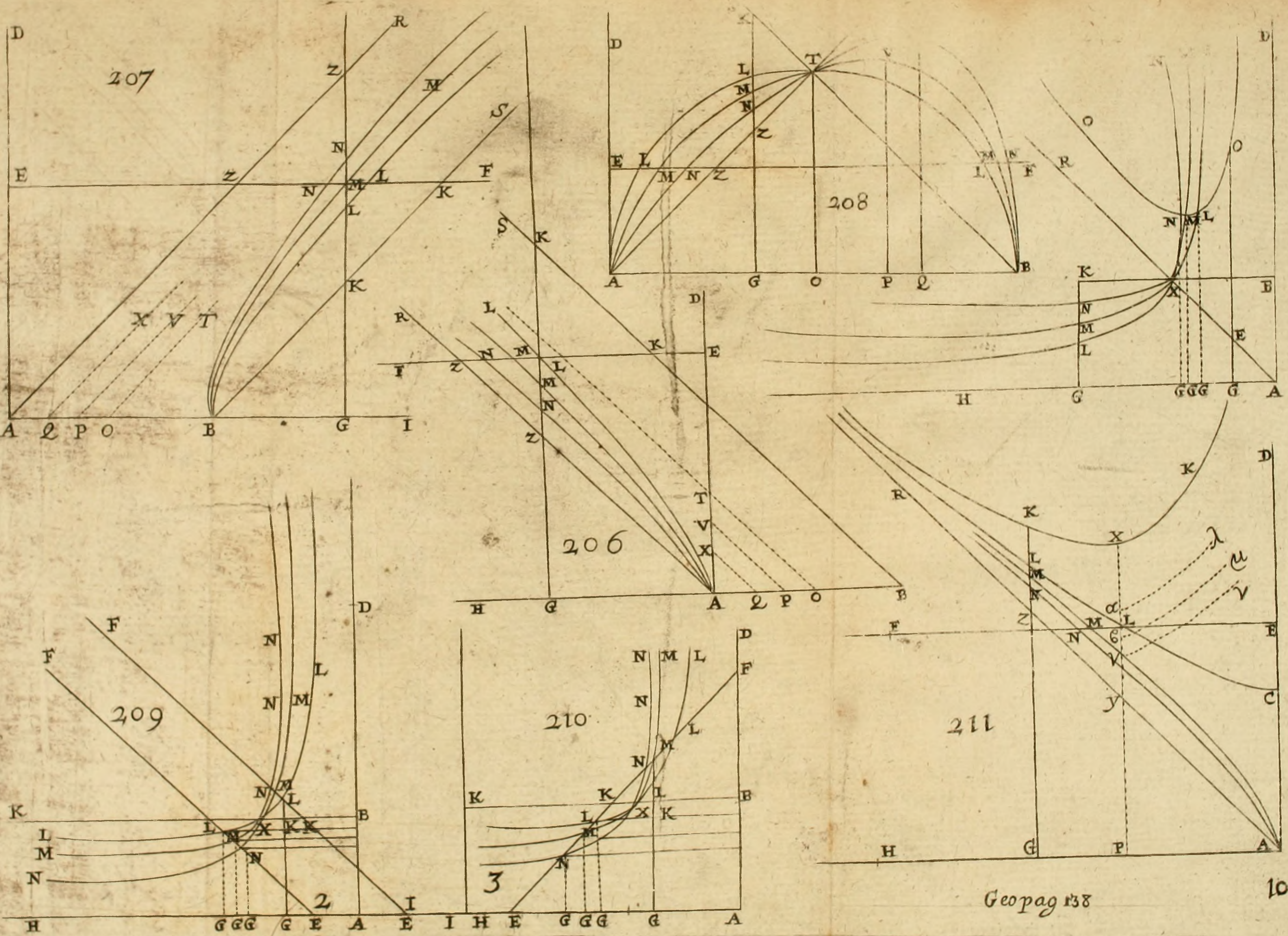
1. Curvæ H L λ, H M μ, H N ν ad decimam ſeriem pertinent; reliquæ C L H, A M H, A N H ad undecimam.

2. Curva H L λ eſt *hyperbola æquilatera*, & curva C L H *circularis circumferentiæ* pars; utriuſque commune centrum eſt O, ipſam AB biſecans (unde A H = $\sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : - \frac{b}{2}$)

3. In decima ſerie radix una ſemper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, ſubinde nulla.

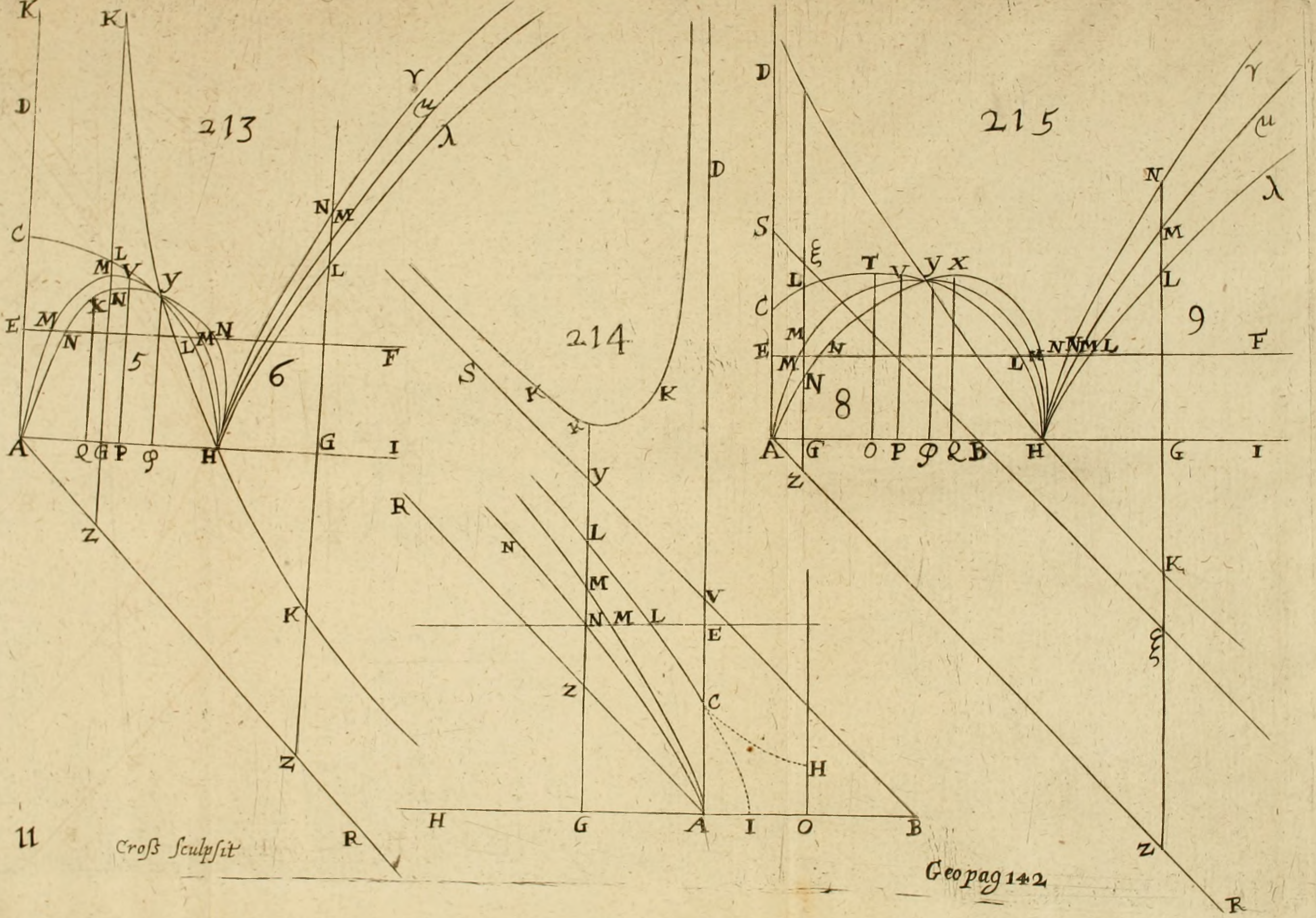
4. A φ = $\frac{cc}{b}$; & A ψ = $\sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : - \frac{b}{4}$; & ordinentur φ Y, ψ X; puncta Y, X ſunt nodi curvarum.

5. In undecimæ ſecundo gradu ordinata A C eſt maxìma; ſin A P = $\sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : - \frac{b}{3}$; & à P ad curvam A M H ordinetur P γ, hæc maxima erit; item ſi A Q = $\sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : - \frac{3b}{8}$; & à


207
D R Z M N S E Z N M L F K L K
X V T
A Q P O B G I
208
D T L M N Z E L M N Z L M N F R
A G O P Q B
O O N M L K X E B N M L E H G G G G G A
206
S K L R M K E F Z N L M N Z D T V X
H G A Q P O B
209
D N L N M N M F F K L M N L X K K B N
2
H G G G G E A E I
210
D N M L F N L M N K K L B L X K M N
3
H E G G G G A
211
D K R K X λ μ ν L M N α F Z M L E N β V C y
H G P A

Geo pag 138

10


213
5
6
214
215
8
9
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
Y
Z
φ
ξ
γ
μ
λ

11

Croß ſculpſit

Geo pag 142

F

Q ad curvam ANH ordinetur $Q\delta$, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad ſeriem octavam ſunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 217.

Pro his, Sit AB $= b$; & AC $= c$; & angulus ABS ſemirectus, & Gξ ad AB utcunque perpendicularis, & AG . AC :: AC . ξK; & KHKIK *hyperbola aſymptotis* SA, SB deſcripta; denuò curvæ CLHLILλ, AMHMIMμ, ANHNINν tales ſint, ut inter AG, GK ſit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH, atque curvæ ILλ, IMμ, INν ad ſeriem duodecimam ſpectant, verùm intermediæ curvæ HLI, HMI, HNI ad decimam tertiam.

2. Curvæ CLH, ILλ ſunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam AB biſecans) & *ſemiaxis* OH (vel OI) $= \sqrt{AOq. - ACq}$ reliquæ tales ſunt, quales figura monſtrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI eſt *ſemicirculus*; reliquas itidem oſtentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (ſi $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; ſi $b = \sqrt{8cc}$; ii coaleſcent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* eſt ipſa AC; ſin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item ſi $AQ = \frac{3}{8}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* eſt ipſa OT; ſin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item ſi $Aq = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoſcentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam ſeriem animadverſa ſunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, ſemper unam radicem haberi; in decima tertia verò ſubinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem conſtant poſito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at ſi $\frac{b}{2} = c$; evaneſcet Series decima tertia; coaleſcent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evaneſcit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo caſu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, ſemiaxem (ipſi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN
Fig. 218. ad infinitum procurrent, ſic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam ſemper, & unicam radicem obtineant. Hæc ſuffecerit inſinuâſſe; quin & rem totam hactenus particulatim attigiſſe. Subnectemus autem notas quaſdam magìs generales.

In *præmiſſas explicationes* animadvertatur generatim

1. Propoſitam quamvis æquationem explicans *curva* deſignatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In recta indefinitè protenſa HI deſignetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè ſumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo ſeriei propoſitam æquationem continentis gradu; nempe ſit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c ſemel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propoſitæ gradus exigit (is autem a pura quæſitæ radicis poteſtate indicatur) in hoc nempe caſu quatuor mediarum proportionalium prima ſit GO; per ejuſmodi puncta O traducta curva AOO propoſito deſerviet. Fig. 219.

2. De radicibus falſis, ſeu negativis nihil attigimus ſuprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propoſitæ ſubrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) ſigna ſunt illis contraria, quæ habet æquatio propoſita; erunt hujuſce *ſubdititiæ æquationis* radices veræ, ſeu poſitivæ ipſius propoſitæ æquationis radices falſæ, ſeu negativæ. *Exemplo* ſit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa^* - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa^* + n^3 = 0$; & hujus, † uti ſuprà edoctum, veræ radices deſignentur, hæ *propoſitæ æquationis* falſæ erunt. Rurſus ſit $a^3 - baa = n^3$, vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; ſubſtituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio propoſita* falſam admittit. † In Serie 3.

3. Quinimo datâ verâ radice quâpiam, depreſſioris gradûs æquatio quædam falſis reperiendis inſerviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota ſit radix una, quæ vocetur f. Conſtruatur æquatio planè ſimilis propoſitæ, eaſdemque *coefficientes* habens, tantum pro a ſubſtituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod ſemper fieri poteſt) per $a - f$; proveniet $aa \begin{matrix} +ba+bf \\ +fa+ff \end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propoſitæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falſas habere; itaque mutatis locorum parium ſignis, ut ità fiat $aa \begin{matrix} -ba+bf \\ -fa+ff \end{matrix} = 0$; hujus æquationis

veræ radices propoſitæ falſas exhibent. Hic inſuper modus æquationis propoſitæ, quatenus illa ex aliarum in ſe ductu provenit, conſtitutionem oſtendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque ſerie ponendo (quovis in gradu ſeriei) fore $n=0$; ut in octava ſerie ſit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima ſit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-cc}\right)$ *radix minima*.

5. *Curvarum nodi*, vel *interſectiones* innoteſcunt, cujuſvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, ſit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

Fig. 220.

6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodíſque paſſim notis inveſtigantur; ego ſimul illas atque curvarum *tangentes* unâ operâ ſic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúſque gradum, cujus æquatio eſt $cca-baa-a^3=n^3$; poſito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de ſupra monſtratis) fore $PT=\frac{3n^3}{3aa+2ba-cc}$, tum conſidero, ſi ordinata P γ ſit maxima, fore tangentem ipſi H A parallelam, ſeu rectam P T eſſe infinitam; quare cùm ſit $n^3=PT\times:3aa+2ba-cc$; & n ſit finita, patet eſſe $3aa+2ba-cc=0$; vel $aa+\frac{2}{3}ba=\frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:}-\frac{b}{3}=a=AP$.

7. Adnoto demùm è *maximis & minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe ſi reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipſius A P in exemplo proximè ſuperiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a ſubſtituatur, ſi quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* conſtrui

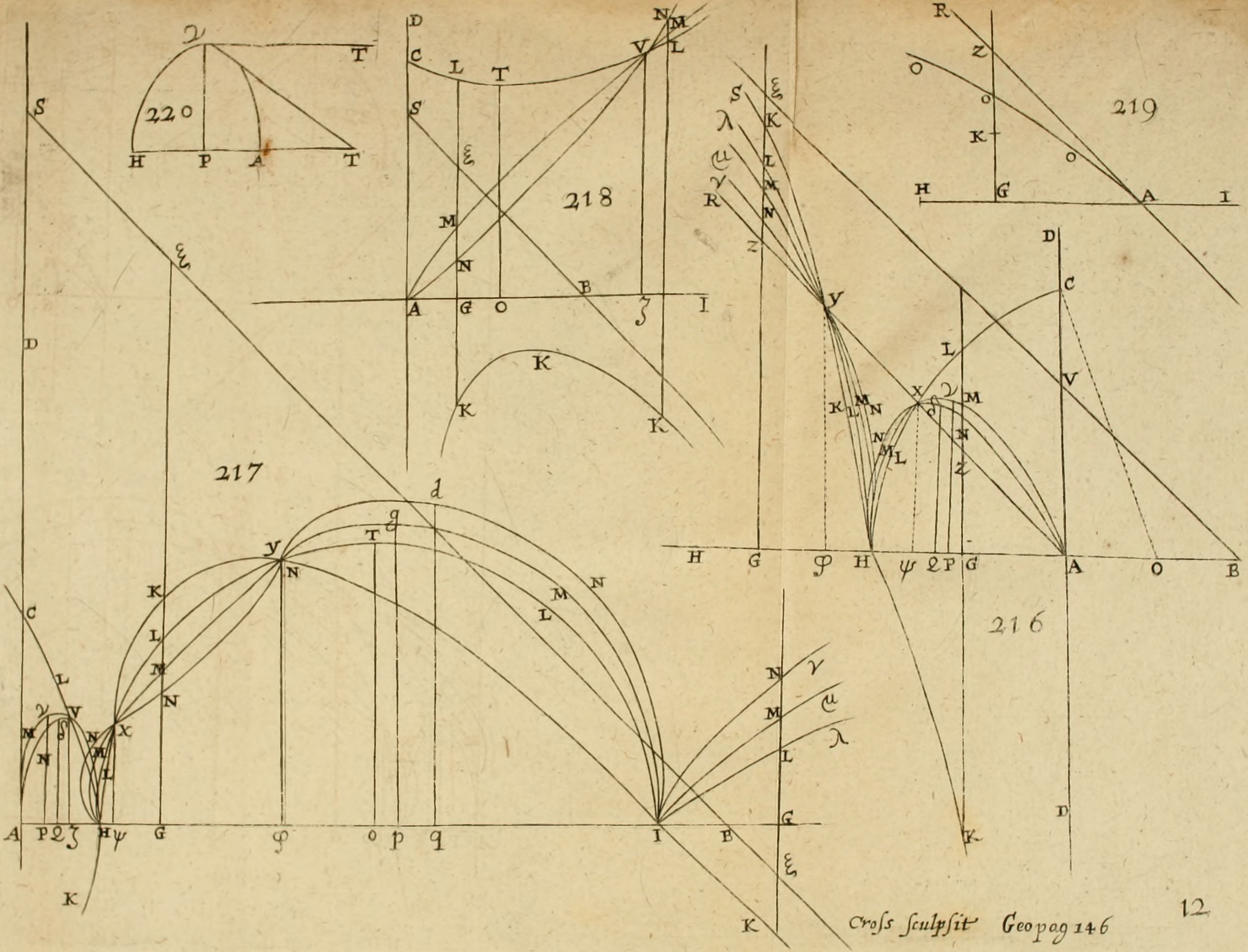
nequit, aut ſaltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & ſpecies præ ſe ferunt. Eadem *minimarum* eſt ratio; tantùm ibi proveniens *ſumma* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmiſſis. Hîc itaque ſubſiſto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

PAg.. 5. *Lin.* 20. ad teſtatur , *lege* teſtatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo cenſeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad. *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg* tangant. *p.* 35. *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* divisâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major eſt ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* verſari. *p* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* $2fxy$. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* ſe interſecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* δ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipſi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62. *l.* 27. *leg.* $KO \sqsubset KA$. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* ϛενολεσχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg,* $QOq = Zq$. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* $HT(a) \sqsubset GA$. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76. *l.* 20. *leg.* tanget recta RFK. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{VCZ\varphi} = CG$. *p.* 87 *l.* 14. *leg* $D\downarrow^{3} = \sqrt{\frac{32}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96 *l.* 22. *leg.* $AD = \frac{s}{t}CA$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* ſemi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis, *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{PLQO}{2\ \text{Rad.}}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propoſitum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* $DM = DI$. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* $n \sqsupset r$. à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.


220
H
P
A
T
T
218
D
C
L
T
V
N
M
L
S
ξ
M
N
A
G
O
B
ζ
I
K
K
K
217
S
ξ
D
C
L
M
N
V
δ
X
K
L
M
N
Y
N
T
d
g
L
M
N
N
M
L
A
P
Q
ζ
H
ψ
G
φ
o
p
q
I
B
G
ξ
K
K
219
R
Z
O
o
K
o
H
G
A
I
216
S
ξ
K
λ
L
M
N
R
Z
Y
D
C
L
V
X
K
L
M
N
M
L
M
N
Z
H
G
φ
H
ψ
Q
P
G
A
O
B
K
D

Croſs ſculpſit Geo pag 146

UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\varpi}$, nec adponitur ἔκθεσις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.

Addenda Lectionibus Geometricis.

Vacuæ Pagellæ explendæ hæc adjici poſſunt: ὑποραδικὰ *vice, animadverto potuiſſe ſecundo Appendiculæ tertiæ Lectionis XII Problemati, pag. 122. Corollaria quædam adponi non injucunda, qualium adſcribam unum & alterum.*

Probl. I.

DEtur linea quæpiam AMB (cujus axis AD, baſis DB) curva ANE deſignetur talis, ut ductâ liberè rectà MNG ad BD parallelâ, quæ ipſam ANE ſecet in N, ſit curva AN æqualis ipſi GM. Fig. 221.

Curva ANE talis ſit ut ſi MT curvam AMB, & NS curvam ANE tangant, ſit $SG . GN :: TG . \sqrt{GMq - TGq}$, ipſa ANE Propoſito faciet ſatis.

Probl. II.

Iiſdem quoad cætera Suppoſitis, & conſtitutis; curva ANE jam talis eſſe debeat, ut curva AN ſemper æquetur interceptæ rectæ NM.

Curva ANE jam talis ſit, ut ſit $SG . GN :: 2 TG \times GM . GMq - TGq$; erit ANE curva quæ deſideratur.

Probl. III.

Datur curva quæpiam DXX, cujus axis DA; reperiatur curva AMB proprietate talis, ut ſi liberè ducatur recta GXM ad ipſam AD perpendicularis, ponaturque SMT curvam AM tangere, ſit MS æqualis ipſi GX. Fig. 222.

Liquet rationem TG ad TM (hoc eſt rationem GD ad MS, vel GX) dari; adeoque rationem TG ad GM quoque dari.

Inſervit hoc ſuperficiebus deſignandis, quarum in promptu ſit dimenſio, etenim (ductâ ME ad AD parallelâ) Superficies Solidi ex plani BME circa axem DB rotatu progeniti adæquat $\frac{\text{Periph}}{\text{Rad}} \times GDX$; ut habetur in 11ª Lectionis XII.

In Lect. XI. appendice, numero XXXIII. de Cycloide profertur Theorema quoddam, id quod ex hujuſmodi generaliori Theoremate deduci potuiſſet.

Fig. 223. Sit AMB curva quælibet, cujus Axis AD, baſis DB, ſit item curva ANE talis, ut ſi arbitrariè ducatur PMN ad DBE parallela, poſitoque rectam TN curvam ANE tangere, ſit TN parallela ſubtenſæ AM; completo Rectangulo ADEG erit Spatium trilineum AEG æquale Segmento ADB.

Huic ſuppar Theorema tale eſt: Iiſdem poſitis, ſi tam Segmentum ADB, quam Spatium AEG circa Axem AG convertantur; erit productum è Segmento ADB Solidum producti ex AEG duplum.

E tangentium porrò contemplatione ſuborta eſt methodus, per quam expediſſimè plurima circa maximas quantitates Theoremata deducuntur; quæ certè ſi tempeſtivè ſe objeciſſent, digna cenſuiſſem quæ Lectionibus inſererentur, ex iis indigitabo nonnulla.

Fig. 224. Sit curva quæpiam ALB, cujus Axis AD, baſis DB; & huic parallelæ LG, $\lambda\gamma$; item LT curvam tangat.

Theor. I.

Sit m numerus quicunque, poteſtates exponens; ſi ponatur $DG^{m-1} \times TG = GL^{m}$, erit $DG^{m} + GL^{m}$ maximum, ſeu majus quam $D\gamma^{m} + \gamma\lambda^{m}$.

Theor. II.

Itidem ſumpto numero m, ſi ponatur $BL^{m-1} \times TL = GL^{m}$; erit $GL^{m} + BL^{m}$ maximum ſeu majus quam $\gamma\lambda^{m} + B\lambda^{m}$.

Theor. III.

Sint numeri quilibet m, n; ſi ponatur $m \times TG = n \times DG$, erit $DG^{m} \times GL^{n}$ maximum, ſeu majus quam $D\gamma^{m} \times \gamma\lambda^{n}$.

Theor. IV.

Quod ſi ponatur $m \times TL = n \times \text{arc}\,BL$, erit $GL^{\underline{n}} \times BL^{\underline{m}}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma\lambda^{\underline{n}} \times B\lambda^{\underline{m}}$.

Theor. V.

Si fuerit $TG \times GL = DGLB$, erit $DGLB \times GL$ maximum, ſeu majus quàm $D\gamma\lambda B \times \gamma\lambda$.

Theor. VI.

Sin $TG \times GL = 2\,DGLB$, erit $GL \times \sqrt{DGLB}$ maximum, ſeu majus quàm $\gamma\lambda \times \sqrt{D\gamma\lambda B}$.

Haud difficili negotio, cum hæc demonſtrantur, tum ejuſmodi complura deprehenduntur.

Ad illa verò ſuccinctius comprobanda deſervire poſſunt hujuſmodi Theoremata.

Sint duæ curvæ AGB, DHC quarum communis axis AD, ſed ordinatæ inverſo ſitu increſcant ab A ad DB, decreſcant à D ad AC; ad ordinatæ verò communis GEH terminos, recta GS curvam AGB, & recta HT curvam DHC contingant. Fig. 225.

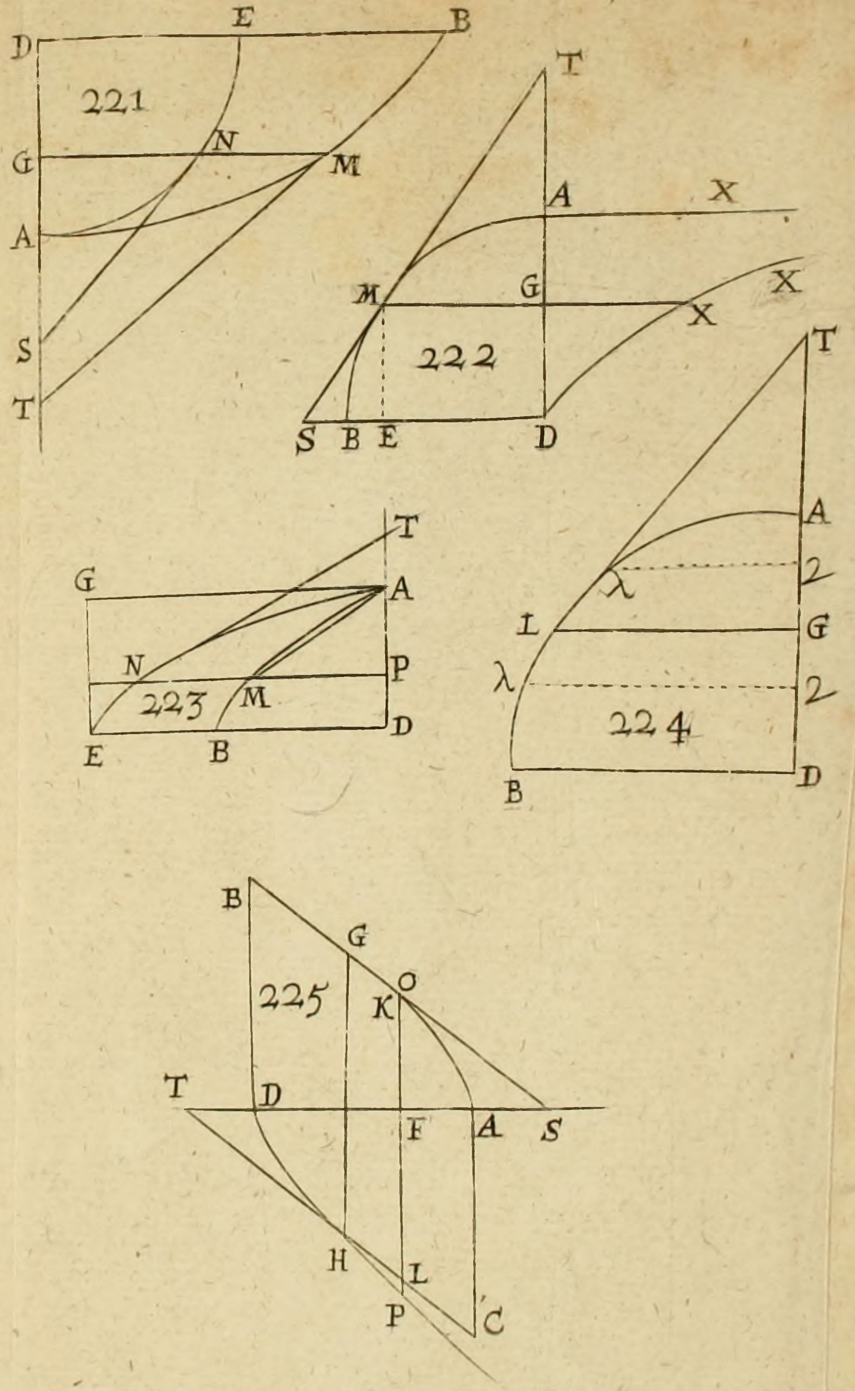
I. Si recta HT rectæ GS parallela ſit, erit GEH maxima ordinatarum in continuum jacentium ſumma.

Nam utcunque ducta OKFLP ad GEH parallela (quæ Lineas ſecet ut cernis) erit $GH = QP \sqsubset KL$.

Not. Verum hoc, ſi curvarum partes concavæ axi obverſæ jaceant, aliàs GEH erit minima.

II. Si $ES = ET$, erit rectangulum ex EG, EH maximum: Nam ob $SE.SF :: EG.FO$, & $TE.TF :: EH.FP$; erit $SE \times TE . SF \times TF :: EG \times EH . FO \times FP$, itaque cum ſit $SE \times TE \sqsubset SF \times TF$, erit $EG \times EH \sqsubset FO \times FP$.

FINIS.


221
D
E
B
G
N
M
A
S
T
222
T
A
X
M
G
X
X
S
B
E
D
223
T
G
A
N
P
M
D
E
B
224
T
A
λ
2
L
G
λ
2
B
D
225
B
G
O
K
T
D
F
A
S
H
L
P
C

Geom: pag: 149

13.